

82 Übungen und Lösungen

82.1 Übungen

1. Berechnen Sie das Spatprodukt $S = (\vec{P} \times \vec{Q}) \cdot \vec{R}$ für $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Was stellt das Spatprodukt dar? (Skizze).

Vergleichen Sie S mit $T = (\vec{Q} \times \vec{P}) \cdot \vec{R}$.

2. Geben Sie die Vektordarstellung für einen Kreis mit dem Radius $r = 2$ m, der parallel zur und 5 m über der Π_1 - Ebene liegt.

3. Zwischen zwei auf einer Geraden liegenden Stabmagneten im Abstand von $d = 20$ mm herrscht eine Abstossungskraft von 17 N. Wie gross wird die Kraft, wenn sich die Stabmagnete in einer Entfernung von
a) $d = 10$ mm, b) $d = 40$ mm und c) $d = 30$ mm befinden?

Suchen Sie eine allgemeine Formel $F_2 = F_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$

4. Ein unendlich langer Leiter stehe normal auf Π_1 . Im Abstand von $r = 30$ mm werde eine magnetische Flussdichte $B = 10^{-4} \text{ Vsm}^{-2} = 10^{-4} \text{ T} = 100 \mu\text{T}$ festgestellt. Wie gross wird B für
a) $r = 15$ mm, b) $r = 60$ mm und c) $r = 40$ mm

5. Zeigen Sie allgemein, dass gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \Delta \cdot \vec{H}$$

6. Zwei lange, gerade, stromdurchflossene Leiter stehen normal auf Π_1 und gehen durch die Punkte A und B

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ cm} \quad \vec{R}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

Konstruieren Sie die Feldlinien, wenn

- a) beide Leiter vom gleichen Strom $I = 50$ A in gleicher Richtung durchflossen werden,
b) der eine Leiter vom doppelten Strom durchflossen wird.

7. FELD GERADER LEITER

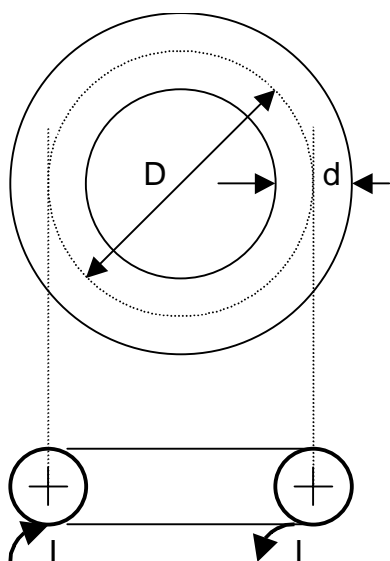
FELDSTÄRKE H UND FLUSSDICHTE B

Zwei unendlich lange, gerade Leiter stehen **normal** auf der $y - z$ (π_2) - Ebene, aufgespannt durch \vec{e}_2 und \vec{e}_3 , und werden vom Strom $I = 50 \text{ A}$ je in der **negativen** x (\vec{e}_1) - Richtung durchflossen. Die Leiter gehen durch die Punkte **P** und **Q**.

- a) Wie gross werden \vec{B} , \vec{H} , sowie $B = |\vec{B}|$, $H = |\vec{H}|$ in den Punkten **S** und **T** ?
 b) Wie gross ist die Kraft **F** pro Meter, die zwischen den beiden Leitern wirkt ?

$$\vec{R}_P = \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ mm}; \quad \vec{R}_Q = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ mm}; \quad \vec{R}_S = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mm}; \quad \vec{R}_T = \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

8.

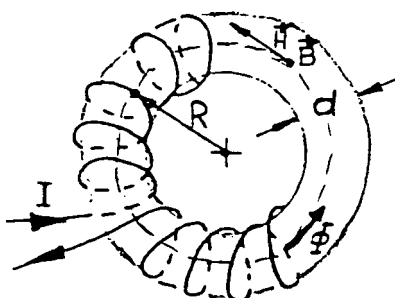


Eine Kreisringluftspule weise einen mittleren Durchmesser von $D = 150 \text{ mm}$ und einen Fluss von $\Phi = 500 \text{ nWb}$ auf.

Der Durchmesser der einzelnen Windungen betrage $d = 20 \text{ mm}$ und derjenige des Drahtes $\delta = 500 \mu\text{m}$. In den Windungen herrsche eine Stromdichte von $J = 10^7 \text{ Am}^{-2}$. $\rho_{\text{Cu}} = 17,4 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m}$.

- a) Wie gross wird die magnetische Flussdichte B ?
 b) In welcher Richtung verläuft der Vektor B ?
 c) Wie gross wird der magn. Widerstand R_M ?
 d) Welchen Wert nimmt die Durchflutung Θ an ?
 e) Wie viele Windungen N weist die Spule auf ?
 f) Welcher Strom I fliesst in den Windungen.
 g) Wie lang L wird der Wickeldraht ?
 h) Kann die Spule einlagig gewickelt werden ?

9. KREISRINGLUFTSPULE



Es sind $R = 60 \text{ mm}$ und $d = 4 \text{ mm}$.

Die Spule sei einlagig und eng bewickelt mit Draht vom Querschnitt $A = 0,5 \text{ mm}^2$.

In den Windungen herrsche eine Stromdichte von $J = 3 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$.

- a) Wie viele N Windungen weist die Spule auf ?
 b) Wie gross wird der magnetische Fluss Φ in der Spule ?
 c) Wie gross wird die magnetische Durchflutung Θ ?
 d) Wie gross wird der magnetische Leitwert Λ ?

10. Beweisen Sie, dass im langen, geraden Leiter allgemein gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

11.

Gegeben sei ein kreisförmiger, vom Strom $I = 8 \text{ A}$ durchflosse-

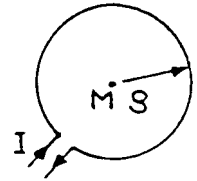
ner Leiter in Π_2 mit dem Mittelpunkt $\vec{R}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ mm}$ und dem

Radius $\rho = 100 \text{ mm}$.

Wie gross wird die magnetische Feldstärke H

a) Im Mittelpunkt des Kreises ?

b) Im Punkt P mit $\vec{R}_P = \begin{pmatrix} -250 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ mm}$?



12.

Gegeben sei eine Kreisringspule (Toroid) in Luft mit dem mittleren Radius $R = 50 \text{ mm}$ und dem Radius der einzelnen Windungen $r = 5 \text{ mm}$. In der Spule soll ein Fluss von $\Phi = 300 \text{ nWb}$ herrschen.

a) Wie gross wird die magnetische Flussdichte B in der Spule ?

b) Welche Werte nehmen die Durchflutung Θ und die magn. Feldstärke H an ?

c) Am Innenrand der Spule liege Windung an Windung (einlagig und eng bewickelt). Die Stromdichte betrage $J = 5 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$.

Wie viele Windungen weist die Spule auf ? $N = ?$

Wie gross wird der Drahtdurchmesser ? $\delta = ?$

d) Wie gross wird der Widerstand der Spule ? $R = ?$ ($\rho_{\text{Cu}} = 17,4 \cdot 10^{-9} \Omega \text{m}$)

13. FELD GERADER LEITER

FELDSTÄRKE H UND FLUSSDICHTE B

Drei unendlich lange, gerade Leiter stehen normal auf Π_2 und gehen durch die Punkte A, B und C.

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ cm}; \quad \vec{R}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ cm}; \quad \vec{R}_C = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ cm}. \quad \vec{R}_P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

Die beiden Leiter durch A und C werden je in negativer, der Leiter durch B in positiver x -Richtung vom Strom $I = 50 \text{ A}$ durchflossen.

a) Wie gross wird die magnetische Feldstärke \vec{H} im Punkt P ?

b) Wie gross wird die magnetische Flussdichte \vec{B} im Punkt P ?

c) Wie gross und in welcher Richtung muss der Strom I_1 durch den Leiter in A und der Strom I_2 durch den Leiter in B gewählt werden, damit \vec{H} und \vec{B} im Punkt P gerade Null werden ?

14. Zeigen Sie, dass an einer Grenzschicht gilt:

$$\frac{B_1}{B_2} = \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right)^2\right] \cdot \cos^2 \beta}, \text{ worin } \beta = \text{Winkel zwischen } B_2 \text{ und Grenzschicht.}$$

15. GERADE SPULE

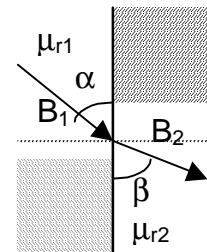
Gegeben sei eine gerade Spule mit der Länge $L = 200 \text{ mm}$, dem Radius $\rho = 30 \text{ mm}$ und $N = 150$ Windungen. Die Windungen werden vom Strom $I = 10 \text{ A}$ durchflossen.

- Wie gross wird die magnetische Feldstärke H im Mittelpunkt der Spule ?
- Wie gross werden H und B am Ende der Spule ?
- Wie gross wird die Stromdichte J in den Windungen, wenn die Spule eng (Windung an Windung) gewickelt ist ?

16. Gegeben seien zwei aneinandergrenzende Materialien mit den relativen Permeabilitäten $\mu_{r1} = 200$ und $\mu_{r2} = 350$.

Die magnetische Flussdichte $B_2 = 180 \mu\text{T}$ trete unter dem Winkel $\beta = 52,5^\circ$ in das Material 2 ein.

- Unter welchem Winkel α tritt B_1 aus dem Mat 1 aus ?
- Wie gross wird B_1 ?
- Wie gross sind die Normal- und Tangentialkomponenten von B_1 ?



82.2 Lösungen

8.

$$D = 150 \text{ mm} \quad \Phi = 500 \text{ nWb}$$

$$d = 20 \text{ mm} \quad |\vec{j}| = 10^7 \text{ Am}^{-2} = 10 \text{ Amm}^{-2}$$

$$\delta = 500 \mu\text{m} \quad \rho_{\text{Cu}} = 17,4 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m} = 17,4 \cdot 10^{-3} \Omega \text{mm}^2 \text{m}^{-1}$$

$$a) \underline{|\vec{B}|} = \frac{4\Phi}{d^2\pi} = \underline{1,59 \text{ mT}} \quad b) \text{ im Gegenuhreigersinn}$$

$$c) \underline{R_M} = \frac{4D}{\mu_0 d^2} = \underline{1,194 \cdot 10^9 \text{ H}^{-1}} \quad d) \underline{H} = \frac{4D\Phi}{\mu_0 d^2} = \underline{596,83 \text{ A}}$$

$$e) \underline{N} = \frac{16D\Phi}{\mu_0 |\vec{j}| d^2 \delta^2 \pi} = \underline{304 \text{ Wdg.}} \quad f) \underline{I} = |\vec{j}| \frac{\delta^2 \pi}{4} = \underline{1,96 \text{ A}}$$

$$g) \underline{|\vec{H}|_i} = \frac{4D\Phi}{\mu_0 d^2 (D-d)\pi} = \underline{1,46 \text{ kAm}^{-1}} \quad h) \underline{L} = \frac{16D\Phi}{\mu_0 |\vec{j}| d \delta^2} = \underline{19,1 \text{ m}}$$

$$\underline{|\vec{H}|_a} = \frac{4D\Phi}{\mu_0 d^2 (D+d)\pi} = \underline{1,12 \text{ kAm}^{-1}}$$

$$i) \text{NS} \stackrel{?}{<} (D-d)\pi \quad \text{Abstand zwischen} \quad \text{Innen} \frac{(D-d)\pi - \text{NS}}{N+1} = \underline{841 \mu\text{m}}$$

$$\text{ja} \quad \text{den Windungen:} \quad \text{Aussen} \frac{(D+d)\pi - \text{NS}}{N+1} = \underline{1,25 \text{ mm}}$$

12.

$$a) \underline{|\vec{B}|} = \frac{\Phi}{r^2\pi} = \underline{3,82 \text{ mT}} \quad R = 50 \text{ mm}$$

$$b) \underline{|\vec{H}|} = \frac{\Phi}{\mu_0 r^2\pi} = \underline{3,04 \text{ kAm}^{-1}} \quad r = 5 \text{ mm}$$

$$\underline{H} = \frac{\Phi 2R}{\mu_0 r^2} = \underline{954,93 \text{ A}} \quad \Phi = 300 \text{ nWb}$$

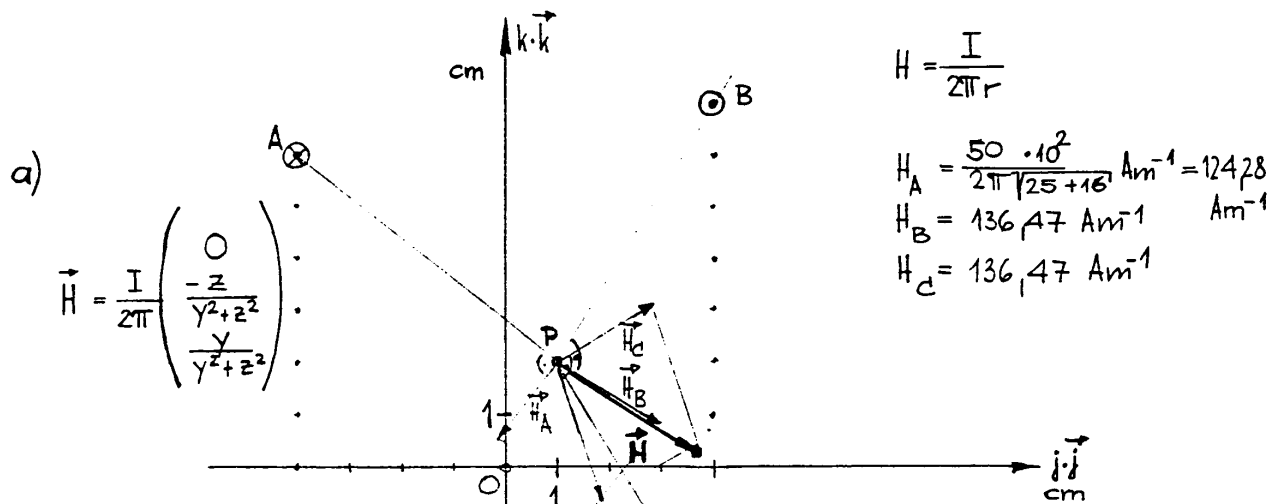
$$\rho_{\text{Cu}} = 17,4 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m} \quad |\vec{j}| = 5 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$$

$$c) \underline{\delta} = \frac{4R\Phi}{\mu_0 |\vec{j}| \pi^2 r^2 (R-r)} = \underline{860,04 \mu\text{m}}$$

$$\underline{N} = \frac{\mu_0 |\vec{j}| \pi^3 r^2 (R-r)^2}{2R\Phi} = \underline{328,76 \text{ Wdg.}}$$

$$d) \underline{R_S} = \frac{\rho_{\text{Cu}} \pi^3 |\vec{j}|^3 r^7 (R-r)^4}{\Phi^3 \cdot 4R^3} = \underline{309,35 \text{ m}\Omega}$$

13.



$$\vec{H}_A = \frac{-I}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-(z-6)}{(y+4)^2+(z-6)^2} \\ \frac{y+4}{(y+4)^2+(z-6)^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{H}_A = \frac{-50 \cdot 10^2}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-(2-6)}{(1+4)^2+(2-6)^2} \\ \frac{1+4}{(1+4)^2+(2-6)^2} \end{pmatrix} \text{ Am}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -77,636 \\ -97,046 \end{pmatrix} \text{ Am}^{-1}$$

Kontrolle:

$$|\vec{H}_A| = 124,28 \text{ Am}^{-1}$$

$$\vec{H}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 117,026 \\ -70,215 \end{pmatrix} \text{ Am}^{-1}; \quad \vec{H}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 117,026 \\ 70,215 \end{pmatrix} \text{ Am}^{-1}; \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 159,416 \\ -97,046 \end{pmatrix} \text{ Am}^{-1}$$

b)

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 196,558 \\ -121,952 \end{pmatrix} \text{ mT}; \quad |\vec{B}| = 231,316 \text{ mT}$$

$$|\vec{H}| = 184,076 \text{ Am}^{-1}$$

c) $\vec{H}'_A + \vec{H}''_B + \vec{H}_C = 0 \rightarrow$ Bestimmungsgleichungen: $a \cdot \vec{H}'_A + b \cdot \vec{H}''_B + \vec{H}_C = 0$

\rightarrow Gleichungssystem: $\left. \begin{array}{l} -77,636 \cdot a + 117,026 \cdot b = -117,026 \\ -97,046 \cdot a - 70,215 \cdot b = -70,215 \end{array} \right\} a \text{ und } b = ?$

\rightarrow $\underline{a = 0,978}$
 $\underline{b = -0,351}$

\rightarrow $\underline{I^I = 0,978 \cdot 50 \text{ A} = 48,887 \text{ A}}$

\rightarrow $\underline{I^{II} = -17,568 \text{ A}}$

\rightarrow Strom nun auch in negativer \vec{i} -Richtung!