Hochschule für Technik und Architektur Bern
Abteilung Elektrotechnik und Elektronik
BFH Bereich Elektro- und Kommunikationstechnik

Elektrotechnik Grundlagen

Kapitel 81

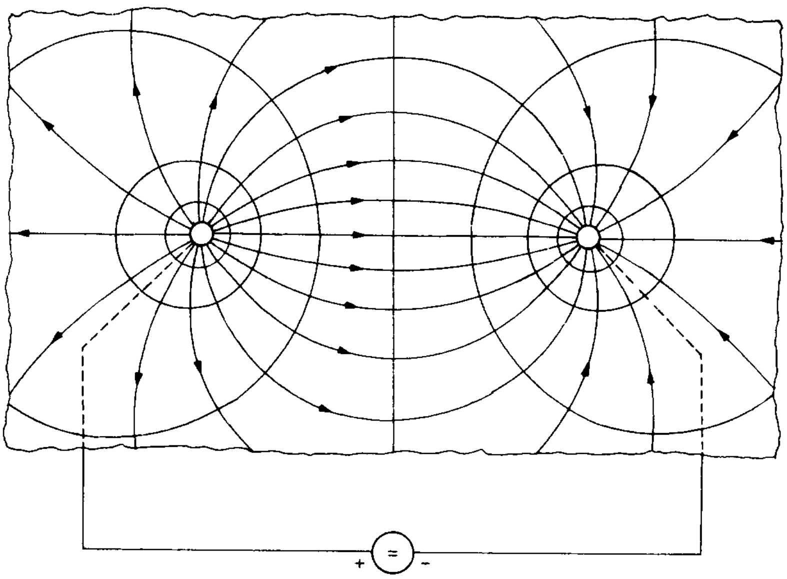
Elektrisches Feld

2003
Kurt Steudler

(/ET_82.doc)

Inhaltsverzeichnis

81 Elektrisches Feld 4
81.1 Ladung und elektrische Feldgrössen 4
81.1.1 Die elektrische Ladung und ihre Wirkung 4
81.1.2 Die elektrischen Feldgrössen 5
81.1.3 Äquipotentialflächen 7
81.1.4 Gradient eines Feldes 8
81.1.5 Verschiebungsfluss, Flächenladungsdichte 10
81.1.6 Elektrische Influenz. Ladungstrennung 11
81.1.7 Elektrische Feldkonstante und Dielektrizitätszahl 12
81.1.8 Piezoelektrischer Effekt 14
81.2 Ausgewählte Felder 15
81.2.1 Feld der geladenen Kugel 15
81.2.2 Langer gerader Leiter 15
81.2.3 Das Grenzschichtproblem 16
81.3 Die Kapazität C 17
81.3.1 Plattenkondensator 17
81.3.2 Kugelkondensator 18
81.3.3 Zylinderkondensator 18
81.4 Energie und Kraft im elektrostatischen Feld 19
81.4.1 Kraftwirkung am Plattenkondensator 19
81.4.2 Energiedichte 19
81.4.3 Coulomb und das Mass für die Kapazität 20
81.5 Das elektrische Strömungsfeld 21
81.5.1 Feldgrössen im Strömungsfeld 21
81.5.2 Leistung im Strömungsfeld 22



Literaturverzeichnis und Software

L 81-1 Feynman Richard P., Leighton Robert B., Sands Matthew, The Feynman Lectures on Physics, mainly electromagnetism and matter, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts), Palo Alto, London.

L 81-2 Frohne Heinrich, Löcherer Karl-Heinz und Müller Hans, Grundlagen der Elektrotechnik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1996, ISBN 3-519-46400-4.

L 81-3 Gren Joachim und Krause Joachim, Metzler Physik, Verlag Schroedel, Hannover, 1998, ISBN 3-507-10700-7.

L 81-4 Hagmann Gert, Grundlagen der Elektrotechnik, AULA Verlag Wiesbaden, Auflage 3, ISBN 3-89104-506-9.

L 81-5 Lüscher Edgar, Experimentalphysik II, Hochschultaschenbücher BI 115/115a, Bibliographisches Institut, Mannheim.

L 81-6 MATHCAD® 2000. Mathematiksoftware, die sich für numerische Rechnungen und Laborauswertungen eignet.

L 81-7 Meinke H., Gundlach Friedrich Wilhelm, Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, Studienausgabe in 3 Bänden, Springer Verlag Berlin – Heidelberg – New York, 1986, 4. Auflage, ISBN 3-540-15394-2.

L 81-8 Schilt Heinz, Elektrizitätslehre, Birkhäuser Verlag, Basel, 1959.

L 81-9 Tabellenbuch Informations- und Telekommunikationstechnik, Verlag Dr. Max Gehlen, Bad Homburg vor der Höhe, 1998, ISBN 3-441-92102-x.

Figurenverzeichnis

Fig. 81-1 Elektroskop (Aus [L 81-3]) 4
Fig. 81-2 Elektrisches Feld zwischen zwei metallischen Platten 5
Fig. 81-3 Elektrische Felder. (Aus [L 81-3]) 6
Fig. 81-4 Spannung im elektrischen Feld (Aus [L 81-4]) 7
Fig. 81-5 Äquipotentialflächen 7
Fig. 81-6 Infinitesimales Volumenelement 10
Fig. 81-7 Influenz. Ladungstrennung 11
Fig. 81-8 Piezoelektrischer Effekt. (Aus [L 81-3]) 14
Fig. 81-9 Feld einer Kugelladung 15
Fig. 81-10 Langer gerader Leiter 15
Fig. 81-11 Elektrisches Feld an einer Grenzschicht 16
Fig. 81-12 Plattenkondensator 17
Fig. 81-13 Kugelkondensator 18
Fig. 81-14 Zylinderkondensator 18
Fig. 81-15 Versuchsanordnung von Coulomb. 20
Fig. 81-16 Strömungsfeld in Metallplatte. (Aus [L 81-4]) 21
Fig. 81-17 Infinitesimales Volumenelement im Strömungsfeld 21

Tabellenverzeichnis

Tabelle 81-1 Dielektrizitätszahlen, Permittivitätszahlen 13

81 Elektrisches Feld

Das elektrische Feld beschreibt Erscheinungen, die durch geladene Materie bewirkt werden. Materie setzt sich aus kleinsten Einheiten, aus Atomen zusammen. Atome bestehen aus Protonen, Neutronen und Elektronen (einfaches Atommodell) und wirken in der Regel ladungsneutral. [1] Protonen tragen die positive, Elektronen die negative Elementarladung $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. [2]

81.1 Ladung und elektrische Feldgrössen

81.1.1 Die elektrische Ladung und ihre Wirkung

Sobald sich in einem Material die Zahl der Protonen von der Zahl der Elektronen unterscheidet, erscheint eine nach aussen wirkende Ladung. Die Ladungsmenge ergibt sich aus der Differenz der Anzahl Protonen und Elektronen und kann positiv (Elektronenmangel) oder negativ (Elektronenüberschuss) sein.

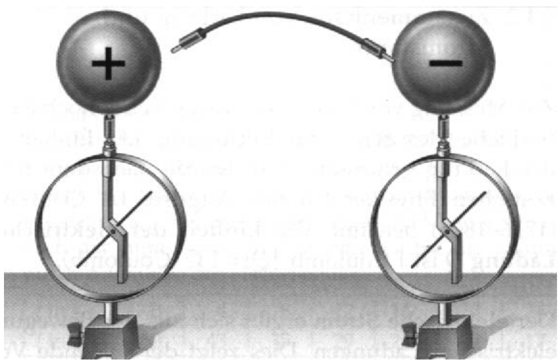


Fig. 81-1 Elektroskop (Aus [L 81-3])

Werden die beiden unterschiedlich geladenen Kugeln leitend verbunden, geht der Ausschlag der beiden Elektroskope [3] zurück.

Elektrische Ladungen üben gegenseitig Kräfte aufeinander aus. Ursache dieser Kräfte ist ein besonderer, durch die Ladung geschaffener Raumzustand, den wir **elektrisches Feld** nennen. Wird das elektrische Feld von ruhender Ladung erzeugt, sprechen wir von einem **elektrostatischen Feld**. [4]

Elektrische Felder sind gerichtete Felder, das heisst **Vektorfelder**.

[1] BOHR sches Atommodell. BOHR Niels, 7.10.1885-18.11.1962, dänischer Physiker, Atommodell 1913, Nobelpreis 1922.

[2] Vgl. auch Kapitel 2.

[3] Elektroskop oder statisches Voltmeter. Gründet zur Anzeige auf den Kräften zwischen Ladungen. Festes und bewegliches Metallplättchen sind elektrische verbunden.

[4] Statische Felder sind zeitunabhängige Felder.

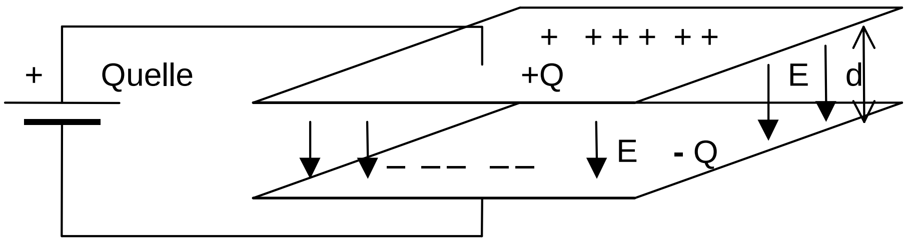


Fig. 81-2 Elektrisches Feld zwischen zwei metallischen Platten

Die Quelle U bewirkt eine Ladungstrennung. Die obere Metallplatte weist einen Elektronenmangel, die untere einen Elektronenüberschuss, auf.
Der Zustand bleibt erhalten, wenn die Quelle entfernt wird. Die beiden Metallplatten zeigen sich dann als unterschiedlich geladene Körper. Die Anordnung speichert Ladung (Ladungsspeicher).

Elektrische Ladungen treten **paarweise** auf. Einer positiven Ladung steht eine negative Ladung gegenüber. Erscheint eine Einzelladung, dann ist ihre Gegenladung sehr weit entfernt.

Eine Anordnung nach Fig. 81-2 nennen wir **Kondensator**. [5] Der Isolator zwischen den beiden metallischen Platten (hier Luft oder Vakuum) heisst **Dielektrikum**. [6] (Vgl. Kapitel 81.3 und 81.1.7)

81.1.2 Die elektrischen Feldgrössen

Auf eine kleine Menge Ladung, eine Probeladung ΔQ, in einem elektrischen Feld wirkt eine Kraft F, die sich proportional zur Ladungsmenge verhält.
Mit $F \sim \Delta Q$ lässt sich mit der Proportionalitätskonstante E auch schreiben $F = E \cdot \Delta Q$.

Die Proportionalitätskonstante **E** macht eine Aussage über die Stärke des elektrischen Feldes und wird daher **elektrische Feldstärke** genannt.

Allgemein ist die Kraft F eine gerichtete Grösse, ein Vektor. Die Ladung Q stellt sich als skalare Grösse dar. Damit muss die elektrische Feldstärke E eine gerichtete Grösse, ein Vektor, sein. [7]

$$\vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{E} \qquad \text{oder} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta Q} \qquad (81\text{-}1)$$

Feldstärke **E** und Kraft **F** haben bei positiver Probeladung $+\Delta Q$ die gleiche und bei

---

5 lat.: condensus; sehr dicht, dicht gedrängt, „Verdichter". Der Kondensator ist ein Ladungsspeicher.
6 Bezeichnung für eine Substanz, die Elektrizität nicht oder nur sehr wenig leitet, aber durch Reibung oder Ladung selber elektr. erregt werden kann (z.B. Bernstein, Quarz, Glimmer). Ein absoluter Nichtleiter ist das Vakuum.
7 Die Dimension der elektrischen Feldstärke E ergibt sich aus NC^{-1} zu Vm^{-1}.

negativer Probeladung -ΔQ entgegengesetzte Richtung.

Das elektrische Feld wird oft in Feldlinien dargestellt. Feldlinien geben an, in welcher Richtung die Kraft auf eine positive Probeladung wirkt.

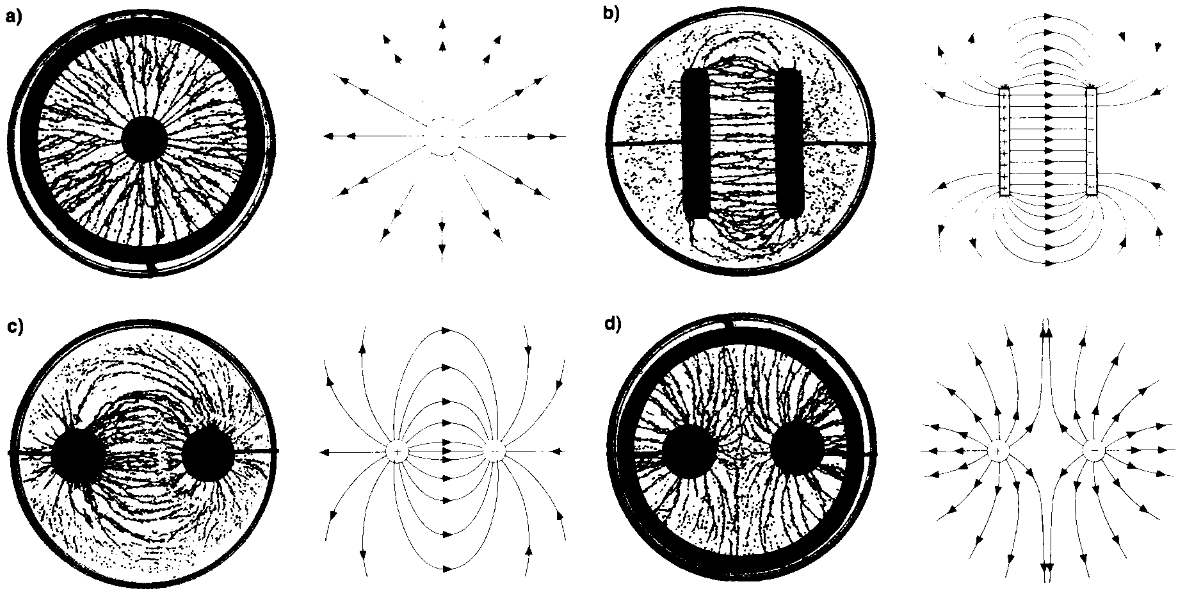


Fig. 81-3 Elektrische Felder. (Aus [L 81-3])

In der Anordnung nach Fig. 81-2 verlaufen alle Feldlinien parallel. Das elektrische Feld im Plattenkondensator ist homogen. [8]

Bewegen wir in Fig. 81-2 eine positive Probeladung ΔQ von der unteren Platte zur oberen Platte, wirkt auf sie die Kraft $F = E \cdot \Delta Q$; dabei sei **d** der Abstand der beiden metallischen Platten.
Es ist die Energie $W = F \cdot d = E \cdot \Delta Q \cdot d$ aufzuwenden, um die Probeladung von der einen zur anderen Platte zu bringen.
Es gilt auch $W = U \cdot I \cdot t = U \cdot \Delta Q$ und durch gleichsetzen wird $E \cdot d = U$. Für das homogene Feld gilt:

$$E = \frac{U}{d} \qquad (81\text{-}2)$$

Entlang eines sehr kurzen Wegstückes gilt $\Delta U = E \cdot \Delta \ell$. Für ein inhomogenes E - Vektorfeld lässt sich verallgemeinert sagen:

$$U_{1,2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \vec{\Delta \ell}$$

8 Die Randzone wird dabei nicht betrachtet.

Entlang eines infinitesimal kurzen Wegstückes gilt $dU = \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$. Damit lässt sich die vorher gegebene Formel schreiben als

$$U_{1,2} = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{d\ell} \qquad (81\text{-}3)$$

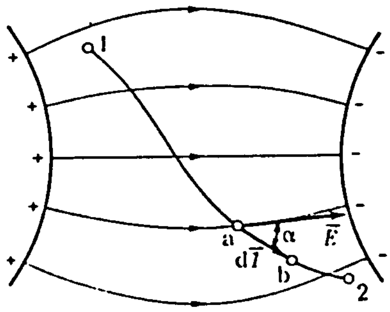


Fig. 81-4 Spannung im elektrischen Feld (Aus [L 81-4])

Umgekehrt ergibt sich das Feld der Feldstärke aus dem Potenzialfeld U(x,y,z) zu

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U = -\mathrm{grad}\,U \qquad (81\text{-}4)$$

Entlang eines geschlossenen Weges verschwindet die Spannung, das heisst es gilt

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0 \qquad (81\text{-}5)$$

81.1.3 Äquipotentialflächen

Im elektrischen Feld finden sich Flächen mit gleichbleibendem Potential φ_k, sogenannte Äquipotentialflächen. Die Spannungsdifferenz $U_{1,2}$ lässt sich auch ausdrücken als Differenz zwischen den Potentialen zweier Äquipotentialflächen φ_1 und φ_2.

$$U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad (81\text{-}6)$$

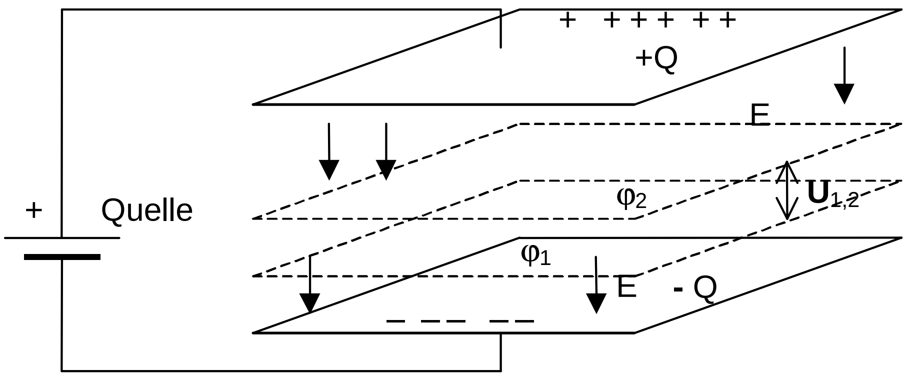
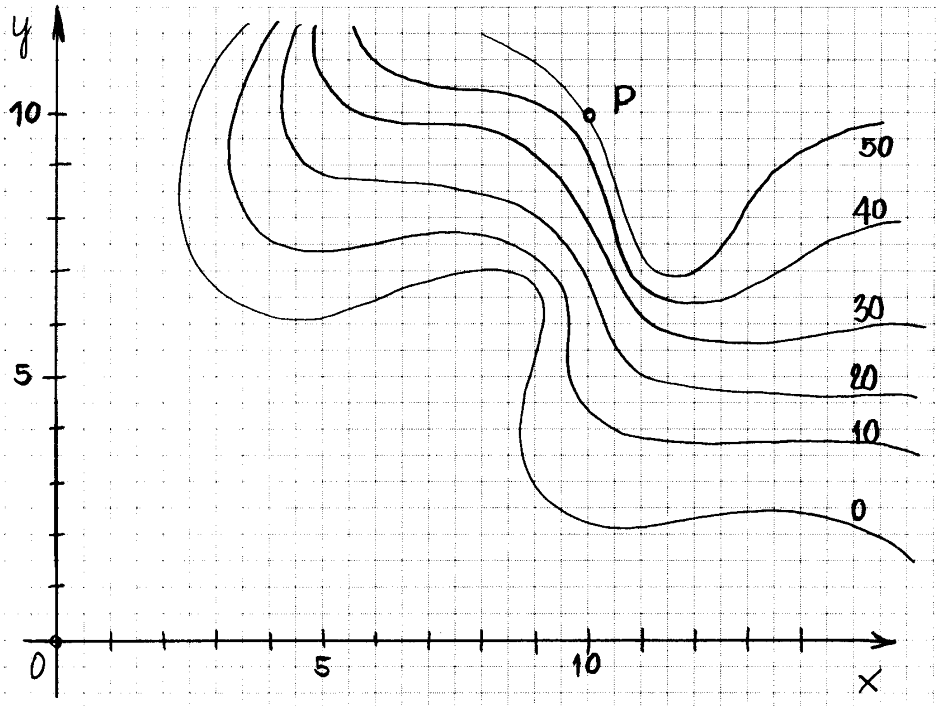
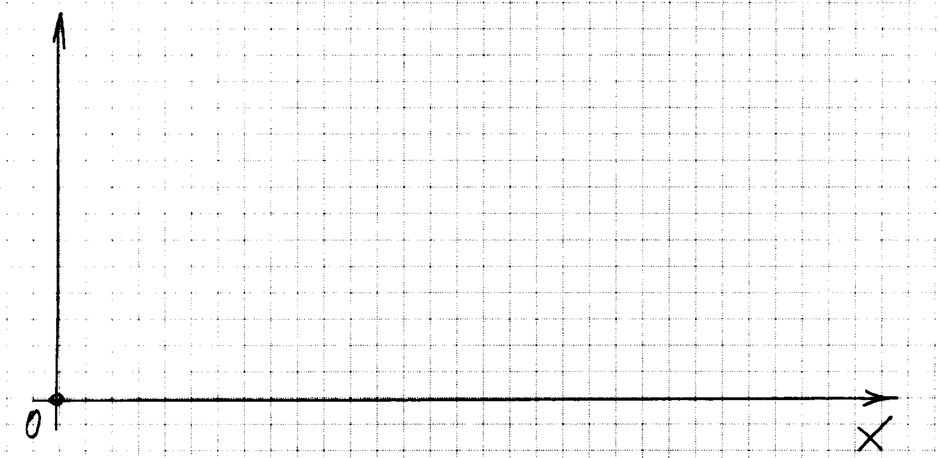


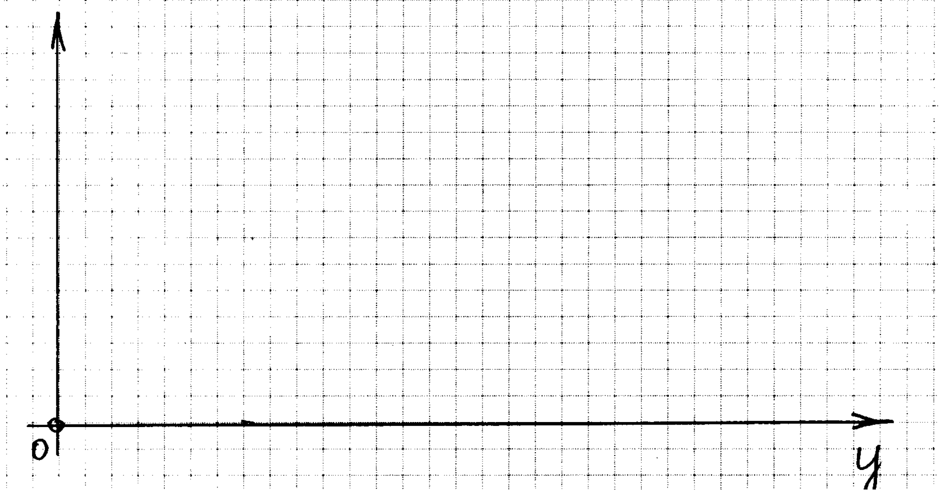
Fig. 81-5 Äquipotentialflächen

81.1.4 Gradient eines Feldes

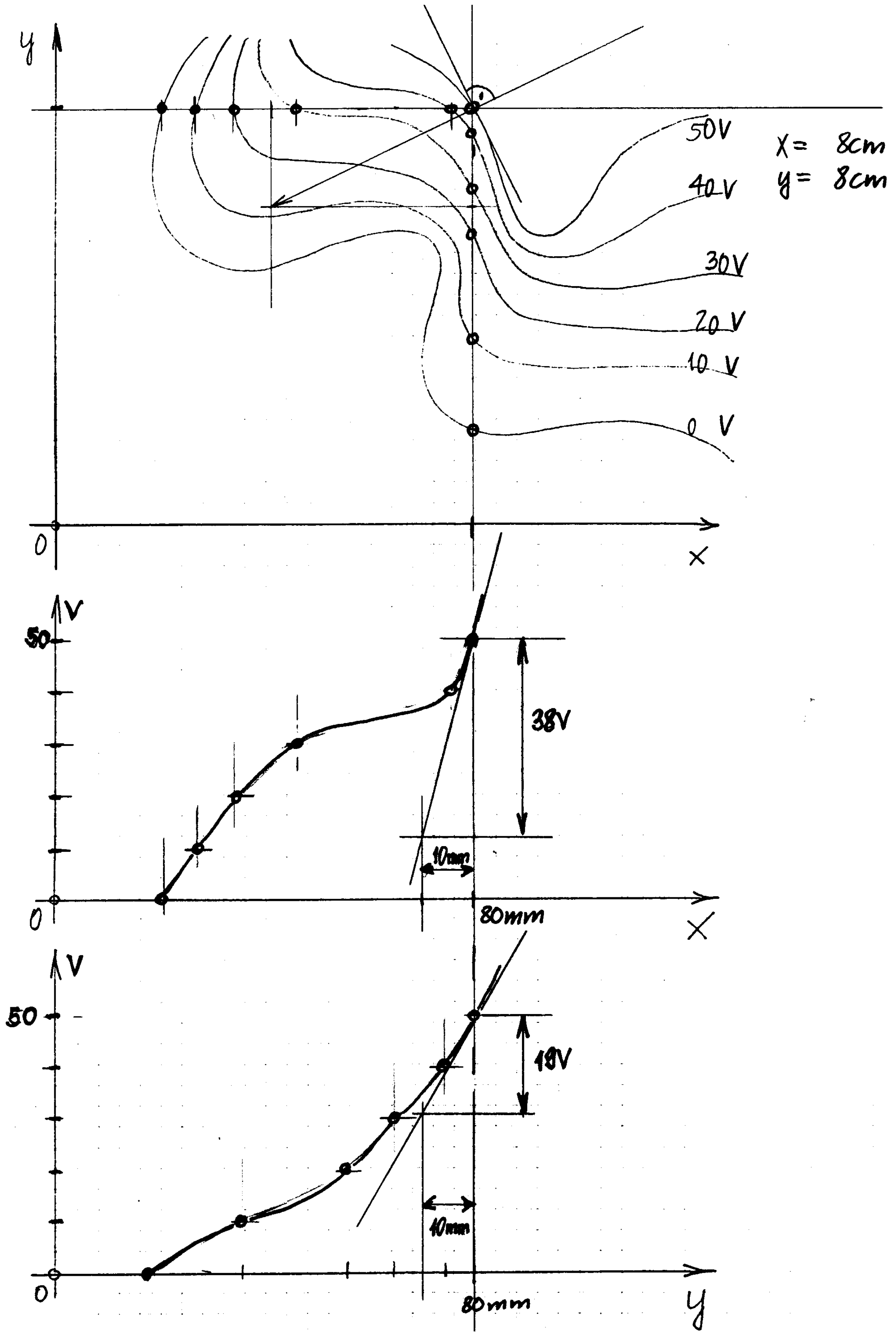
Bestimmen Sie grafisch den Gradienten im Punkt P







Lösung


y
50V
40V
30V
20 V
10 V
0 V
x = 8cm
y = 8cm
0
x
V
50
38V
10mm
0
80mm
x
V
50
18V
10mm
0
80mm
y

81.1.5 Verschiebungsfluss, Flächenladungsdichte

Die Feldlinien zwischen den Platten eines Kondensators lassen sich als Flusslinien auffassen. Im elektrostatischen Feld beginnen diese Flusslinien bei der positiven Ladung (obere Platte, Quelle) und enden bei der negativen Ladung (untere Platte, Senke). Die Gesamtheit dieser Flusslinien charakterisieren den angenommenen Fluss ψ.
Der elektrische Fluss ψ wird auch Verschiebungsfluss oder Erregungsfluss genannt. Der Verschiebungsfluss ψ ist so gross, wie die Ladung, die ihn erzeugt. Es gilt $\psi = Q$.

Die Feldstärke E ist der felderzeugenden Ladung Q proportional. Werden zwei Platten in einer Anordnung nach Fig. 81-2 beziehungsweise Fig. 81-5 in unterschiedlichen Abstand d gebracht und die zu $E = U/d$ gehörende felderzeugende Ladung Q gemessen, lässt sich $E \sim Q$ ermitteln. Das heisst die elektrische Feldstärke E verhält sich proportional zur Ladung Q.

Wird der Versuch mit Platten unterschiedlicher Fläche A wiederholt, lässt sich feststellen, dass sich der Quotient Q/E proportional zur Fläche A verhält. Aus $Q/E \sim A$ ergibt sich, dass $E \sim Q/A$.

Für das homogene Feld zwischen zwei Platten ergibt sich mit der Proportionalitätskonstanten ε_0 :

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \cdot E = D \qquad (81\text{-}7)$$

Der Quotient $Q/A = D$ heisst **Flächenladungsdichte** [9] und ε_0 ist die **elektrische Feldkonstante** mit $\varepsilon_0 = 8{,}8542\ 10^{-12}$ As/Vm.[10]

In einem beliebigen elektrischen Feld gelten folgende Überlegungen aus einem infinitesimal kleinen Volumenelement innerhalb des Feldes:

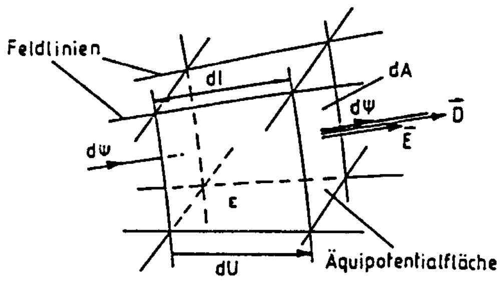


Fig. 81-6 Infinitesimales Volumenelement

In das Volumenelement, begrenzt durch zwei Äquipotenzialflächen und vier Feldlinien treten insgesamt gleich viele Feldlinien ein wie aus. Unter Flächenladungs-

[9] Die Flächenladungsdichte wird auch **Verschiebungsdichte**, Verschiebungsflussdichte oder elektrische Flussdichte genannt. D ist wie E eine vektorielle Grösse.

[10] Die elektrische Feldkonstante wird auch **Dielektrizitätskonstante des Vakuums** genannt.

dichte D verstehen wir daraus das Verhältnis

$$D = \frac{dQ}{dA} = \frac{d\Psi}{dA} \quad \text{oder}$$
$$dQ = \vec{D} \cdot \vec{dA} \qquad (81\text{-}8)$$

Bildet die Fläche A eine Hülle und befindet sich in dieser Hülle eine Ladung Q, dann gilt

$$\Psi = Q = \oiint \vec{D} \cdot \vec{dA} \qquad (81\text{-}9)$$

Die Flächenladungsdichte D ist eine vektorielle Grösse. D und E stimmen in ihrer Richtung überein.

81.1.6 Elektrische Influenz. Ladungstrennung

Wird ein Leiter in ein elektrostatisches Feld gelegt, dann werden sich die in ihm befindenden freien Elektronen aufgrund der Kräfte, die auf die Ladungen wirken, innerhalb des Leiters verschoben. Die Elektronen wandern auf jene Seite des Leiters, die dem positiven Potential zugewandt ist.
Wir nennen diesen Vorgang „Influenz“. [11]

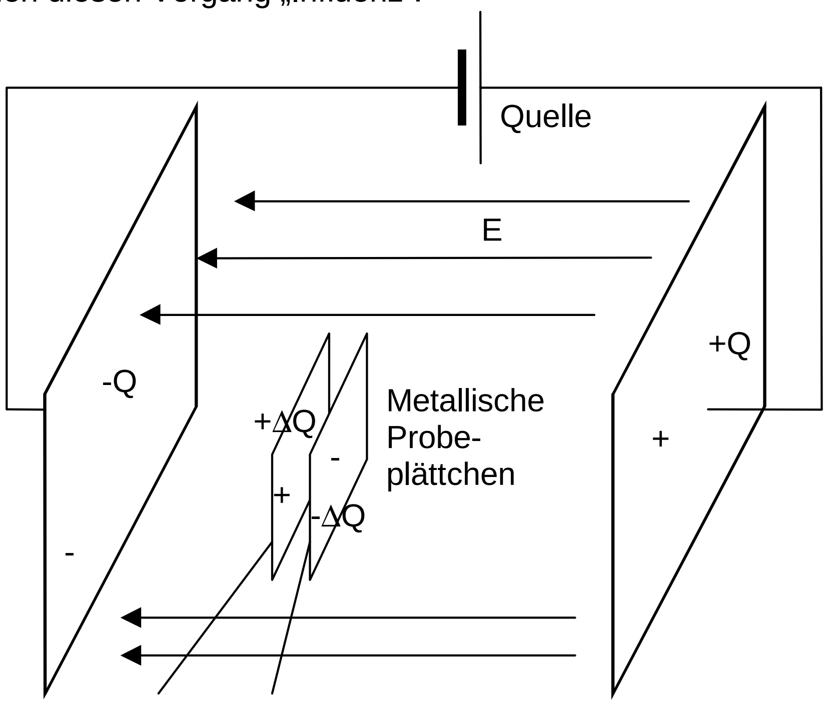


Fig. 81-7 Influenz. Ladungstrennung

Es werden zwei aneinander liegende metallische Plättchen in das elektrische Feld E

[11] lat.: influere, einfliessen; influo, hineinfliessen, unvermerkt eindringen, sich einschleichen. Influenza: Grippe. Influenzmaschine: Elektrisiermaschine (Ladungstrennung).

gebracht und dort getrennt. Zwischen den Plättchen entsteht ein feldfreier Raum. [12]

In die beiden metallischen Plättchen mit der Fläche ΔA dringen, solange diese sich im Feld befinden, gleich viele Feldlinien ein und wieder aus.
Durch die Influenz wanderten die Elektronen in der Probefläche ΔA auf die der +Q - Platte zugewandte Seite.

Nehmen wir die Plättchen getrennt aus dem Feld, bleibt die Ladung erhalten. Es wurde die Ladung ΔQ influenziert und zwischen den beiden Probeflächen besteht ein umgekehrt gerichtetes Feld E, das gleich gross ist wie das äussere Feld E=U/d.
Es gilt

$$\frac{\Delta Q}{\Delta A} = D = \varepsilon_0 \cdot E \qquad (81\text{-}10)$$

Der so gefundene Zusammenhang gilt auch im inhomogenen Feld, wenn die Probeplatten genügend klein sind. In einer sehr kleinen Umgebung kann das Feld als angenähert homogen angesehen werden.

81.1.7 Elektrische Feldkonstante und Dielektrizitätszahl

Die Menge der influenzierten Ladung ist abhängig vom **Dielektrikum**, das heisst vom Material im Feldraum. In den meisten Dielektrika (nichtleitende Stoffe) ist D ~ E,[13] das heisst es gilt

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \qquad (81\text{-}11)$$

Die Proportionalitätskonstante ε heisst Dielektrizitätskonstante.[14]
ε setzt sich zusammen aus einer Konstanten ε_0, der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums (**elektrische Feldkonstante**) und einer materialabhängigen Grösse ε_r, der relativen Dielektrizitätskonstanten.[15]

ε_0	$= 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ C(Vm)^{-1}$	Dielektrizitätskonstante,
	$= 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ As/Vm	des Vakuums
	$= 8{,}8542\ pFm^{-1}$	**elektrische Feldkonstante**, Permittivität
ε_r	relative Dielektrizitätskonstante, **Dielektrizitätszahl**, relative Permittivität, Permittivitätszahl	

[12] Eine Anordnung, in der innerhalb eines Feldes ein feldfreier Raum vorhanden ist, wird „Faraday Käfig“ genannt.
[13] Bei den Dielektrika werden polare und unpolare Stoffe unterschieden.
[14] Die Dielektrizitätskonstante ist bei einigen Stoffen, zum Beispiel Bariumtitanat, nicht konstant, sondern vom angelegten E - Feld abhängig.
[15] Bekannt ist auch die elektrische Suszeptibilität χ. Es gilt $\chi = \varepsilon_r - 1$ oder $\varepsilon_r = 1 + \chi$

Dielektrizitätszahlen ε_r einiger Stoffe: [16]

Stoff	ε_r	Stoff	ε_r	Stoff	ε_r
Anilinharz	3 .. 4	Hartgummi	2,8	Polystyrol PS	2,4 .. 3
Azeton	21,5	Hartpapier	5 .. 6	Polyvinylchlorid,hart	3,2..3,5
Asphalt	2,7	Harzöl	2	= PVC, weich	4 .. 5,5
Bakelit	5	Hölzer	1 .. 7	Porzellan	6
Bariumtitanat	>1000	Kautschuk	2,4	Teflon ®, PTFE [17]	2,1[18]
Basalt	9	Luft	1,0006	Quarz	3,8 .. 5
Benzol	2,25	Marmor	8,3	Quarzglas	4,2..4,4
Bernstein	2,8	Papier	1,333	Rizinusöl	4,6
Diamant	16,5	Paraffin	2,1..2,2	Schellack	3,1
Ebonit	2,6	Pertinax	4,8	Terpentinöl	2,3
Eis bei –20°C	16	Petroleum	2,1	Toluol	2,35
Epoxiharz	3,7	Phenolharz	4 .. 6	Transformatorenöl	2,3
Glas, gewöhnlich	5 .. 7	Plexiglas	3	Wasser (destilliert)	81
Glimmer	5 .. 8	Polyethylen PE	2,2..2,3	Zellulose	6,6
Gummi	2,7	Polypropylen PP			

Tabelle 81-1 Dielektrizitätszahlen, Permittivitätszahlen

Als **Dielektrikum** bezeichnen wir ein nichtleitendes Material (nichtleitende Stoffe), das von einem elektrischen Feld durchsetzt wird.
Da sich die Ladungsträger in einem nichtleitenden Material nicht frei bewegen können ist kein Stromfluss möglich.
Dagegen kommt es zu elastischen Ladungsverschiebungen der Ladungsträger innerhalb der Moleküle. Dabei werden polare und unpolare Stoffe unterschieden.

Bei den **unpolaren** Stoffen werden die Ladungsträger entsprechend dem Feld verschoben. Die Atome werden deformiert und bilden Dipole.
Bei den **polaren** Stoffen sind die Atome oder Moleküle von Natur aus Dipole. Diese Dipole sind ungeordnet und stellen sich im Feld in der Feldrichtung ein. Zudem werden die Atome ebenfalls deformiert.

Man bezeichnet diese Erscheinung bei unpolaren und polaren Stoffen als **dielektrische Polarisation**. Eine Sättigung wird nicht erreicht. Die Polarisation verschwindet, sobald das Feld verschwindet.
Die Polarisation hat zur Folge, dass sich dem äusseren Feld ein „inneres“ elektrisches Feld überlagert.
Ein Dielektrikum aus einer Wachsplatte, die unter elektrischer Spannung gehärtet wurde, bewahrt seine Polarisation über Jahre hinweg. Ein solches Dielektrikum wird als **Elektret** bezeichnet.

[16] $\varepsilon_{r\ Vakuum} = 1$, $\varepsilon_{r\ Luft} = 1{,}000576$

[17] PTFE: Polytetrafluorethylen, Teflon®

[18] 2,0 .. 2,1

81.1.8 Piezoelektrischer Effekt

Das Vorhandensein elektrischer Ladungen in einem Isolator ist durch den im Jahre 1880 von den Brüdern Jacques und Pierre CURIE [19] entdeckten piezoelektrischen Effekt nachweisbar. [20]

Bei Kristallen wie Quarz, Turmalin, Seignettesalz, Zinkblende, Natrium-Kalium-Tartrat und Ethylendiamintartrat (Tartrate sind Salze der Weinsäure) und so weiter tritt durch mechanischen Druck auf die zu einer „polaren Achse" senkrechten Flächen eine elektrische Spannung auf. Der Effekt wird durch die Verschiebung von Ionen in Kristallen mit nichtsymmetrischen Einheitszellen verursacht.

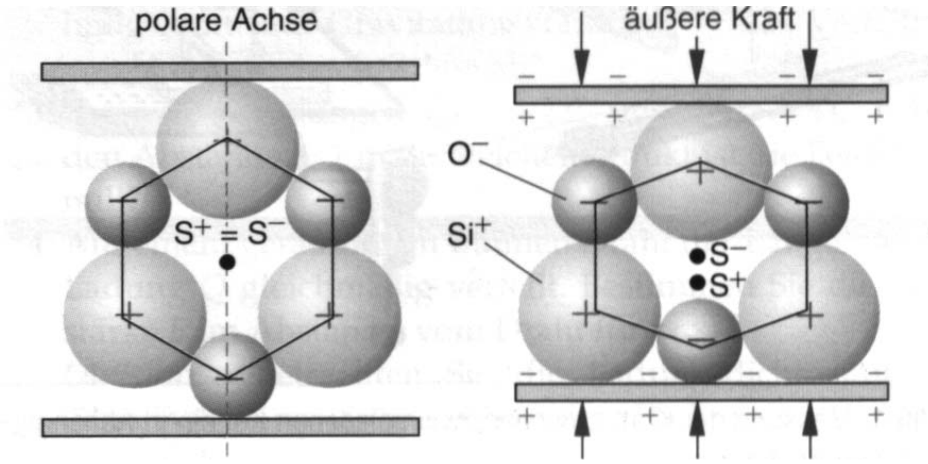


Fig. 81-8 Piezoelektrischer Effekt. (Aus [L 81-3])

Die Abbildung zeigt, wie sich beim Quarz durch Verschiebung der Ionen die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladung verlagern. An den Grenzflächen treten entgegengesetzte Ladungen auf, die man über eine Spannung zwischen den Flächen nachweist.
Der Effekt wird durch die Verschiebung von Ionen in Kristallen mit nichtsymmetrischen Einheitszellen verursacht. Beim Zusammenpressen verschieben sich die Ionen in jeder Einheitszelle und verursachen damit die **elektrische Polarisation**. (Vgl. auch Kapitel 81.1.7)

Es sind piezoelektrische Stoffe (Piezoxide) entwickelt, bei denen man durch einen Druck von einigen MPa (MNm^{-2}) Spannungen von mehreren kV erzeugen kann.

Angewendet wird der piezoelektrische Effekt, bei dem aus mechanischer Deformation elektrische Spannung erzeugt wird: Kristallaufnehmer für Plattenspieler, Gasanzünder, Mikrofone, Ultraschallempfänger, Kraftsensoren, „fühlende" Finger von Robotern, Rasterkraftmikroskop, Rastertunnelmikroskop, Mikrofon und so weiter.

[19] Pierre Curie, Ehemann von Marie, wurde am 15. Mai 1859 in Paris geboren und studierte an der Sorbonne Physik. 1880 beobachtete er gemeinsam mit seinem Bruder Jacques, dass ein elektrisches Potential entsteht, wenn man einen Quarzkristall mechanisch deformiert. Die Brüder nannten das Phänomen Piezoelektrizität. Pierre Curie entdeckte ferner, dass magnetische Substanzen bei bestimmten Temperaturen (dem Curie-Punkt) ihren Magnetismus verlieren.

[20] piezein, πιεζω, griech.: drücken

Technisch wichtig ist auch der umgekehrte Effekt (Elektrostriktion): Durch ein elektrisches Feld wird der Piezokristall mechanisch deformiert. Anwendungen: Tintenstrahldrucker, Ultraschallgeneratoren, Hochtonlautsprecher und so weiter.

Bei konstanter Temperatur ist die Eigenfrequenz von Quarz (Schwingquarz) nahezu konstant. Der Schwingquarz ist daher ein gut geeignetes Frequenznormal.

81.2 Ausgewählte Felder

81.2.1 Feld der geladenen Kugel

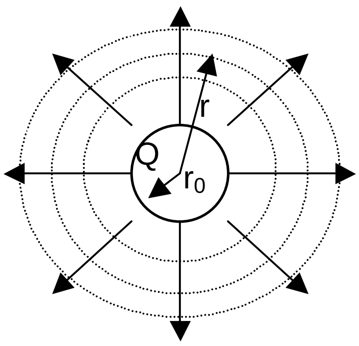


Fig. 81-9 Feld einer Kugelladung

Eine Metallkugel mit dem Radius r_0 trage die positive Ladung Q.
Die Gegenladung (-Q) befinde sich auf einer Hohlkugel mit sehr grossem Radius ($r \rightarrow \infty$).

Die elektrischen Feldlinien laufen daher radial nach aussen und sind gleichmässig verteilt.

Äquipotenzialflächen sind die Oberflächen konzentrischer Kugeln mit beliebigem Radius r.

Der von der Ladung ausgehende Verschiebungsfluss Q ergibt auf jeder Äquipotenzialfläche die Flächenladungsdichte D = Q/A. Daraus wird

$$E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r^2}$$
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r^3} \cdot \vec{r} \qquad (81\text{-}12)$$

81.2.2 Langer gerader Leiter

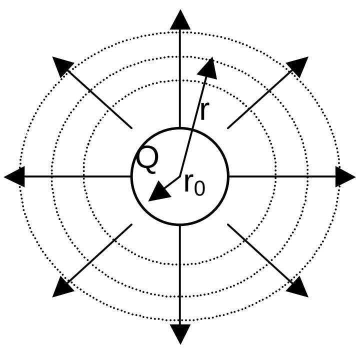


Fig. 81-10 Langer gerader Leiter

Ein ℓ langer, gerader Leiter mit dem Radius r_0 trage die positive Ladung Q.
Die Gegenladung (-Q) befinde sich auf einem konzentrischen Zylinder mit sehr grossem Radius ($r \rightarrow \infty$).
Die elektrischen Feldlinien laufen daher radial nach aussen und sind gleichmässig verteilt.

Äquipotenzialflächen sind die Oberflächen konzentrischer Zylinder mit beliebigem Radius r.

Der von der Ladung ausgehende Verschiebungsfluss Q ergibt auf jeder Äquipotenzialfläche die Flächenladungsdichte D = Q/A. Daraus wird

$$E = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r \cdot \ell}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot \ell} \cdot \vec{r} \qquad (81\text{-}13)$$

81.2.3 Das Grenzschichtproblem

Treffen die elektrische Feldstärke **E** und die Verschiebungsdichte (elektrische Ladungsdichte) **D** schräg auf die trennende Fläche (Grenzschicht) zwischen zwei Isolierstoffen mit unterschiedlichem ε_r auf, erfolgt eine Brechung.

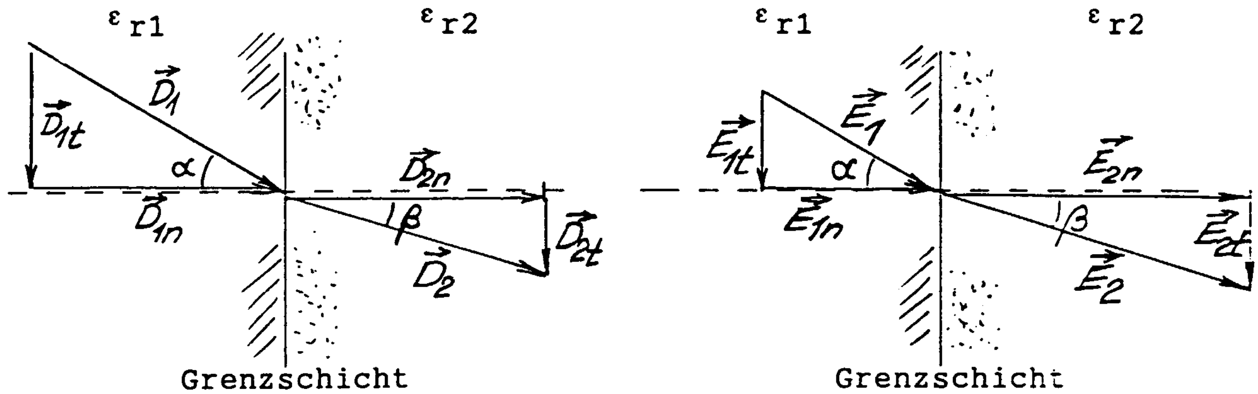


Fig. 81-11 Elektrisches Feld an einer Grenzschicht

Zur Berechnung der Brechung werden die Verschiebungsdichte D und die Feldstärke E je aufgeteilt in ihre Normalkomponente D_{1n} und E_{1n} zur Grenzschicht und in ihre Tangentialkomponente D_{1t} und E_{1t} zur Grenzschicht.

Die Normalkomponente der Verschiebungsdichte D_{1n} und die Tangentialkomponente der Feldstärke E_{t1} bleiben nach der Grenzschicht erhalten. Es gelten

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \quad \text{und} \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \qquad (81\text{-}14)$$

Die Tangentialkomponenten der Verschiebungsdichte D_{1t} und D_{2t} vor der Grenzschicht im Isolierstoff 1 mit ε_{r1} und nach der Grenzschicht im Isolierstoff 2 mit ε_{r2} verhalten sich zueinander wie die relativen Permitivitäten ε_{r1} und ε_{r2}.

Die Verschiebungsdichte D und die Feldstärke E zeigen sich vor und nach der Grenzschicht als gleichgerichtete Vektoren. Daher ergibt sich für die Normalkomponente der Feldstärke die folgende Aussage.

Die Normalkomponenten der Feldstärke E_{1n} und E_{2n} vor der Grenzschicht im Isolierstoff 1 mit ε_{r1} und nach der Grenzschicht im Isolierstoff 2 mit ε_{r2} verhalten sich zueinander umgekehrt proportional zu den relativen Permitivitäten ε_{r1} und ε_{r2}. Damit gelten für D_t und E_n

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\vec{D}_{2t}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \quad \text{und} \quad \frac{\vec{E}_{1n}}{\vec{E}_{2n}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \qquad (81\text{-}15)$$

81.3 Die Kapazität C

81.3.1 Plattenkondensator

Zwei gegenüberliegende Metallplatten stellen einen Ladungsspeicher dar. Solche Ladungsspeicher nennen wir **Kondensator** (hier Plattenkondensator). Zwischen den Platten befindet sich das Dielektrikum. [5, 6]

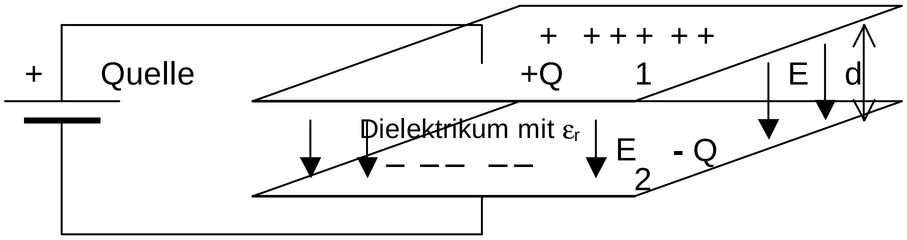


Fig. 81-12 Plattenkondensator

Die Ladung Q auf den beiden Platten ist proportional abhängig von der angelegten Spannung U: Q ~ U.
Es gilt:

$$Q \sim U \quad \text{oder} \quad Q = C \cdot U \qquad (81\text{-}16)$$

Die Proportionalitätskonstante **C** nennen wir Kapazität. Die Kapazität ist ein Mass für die Speicherfähigkeit des felderzeugenden Plattenpaares. Die Grösse von C ist abhängig von den geometrischen Abmessungen einerseits und vom eingebrachten Dielektrikum andererseits.

Im homogenen Feld gilt $D \cdot A = Q$. Darin stellt A die Fläche einer metallischen Kondensatorplatte dar. Zudem sind $D = \varepsilon \cdot E$ und $U = E \cdot d$.
Zusammengestellt wird

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot A}{d} \qquad (81\text{-}17)$$ [21,22]

Die Beziehung $Q = I \cdot t = C \cdot U$ muss in jedem Augenblick erfüllt sein. Dies gilt auch, wenn $U = u(t)$ und $I = i(t)$, wenn sich Spannung und Strom in der Zeit ändern.

[21] Aus der Formel ergibt sich die Dimension der Kapazität C zu $[C] = AsV^{-1}$ = F Farad.

[22] Zu Ehren von Michael FARADAY, 22.9.1791-25.81867, brit. Physiker und Chemiker, entdeckt das Benzol, die Gesetze der elektromagn.Induktion, den F' schen Käfig und so weiter.

Mit $i(t) \cdot dt = C \cdot du(t)$ werden daher

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \text{ und } u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt \qquad (81\text{-}18)$$ [23]

81.3.2 Kugelkondensator

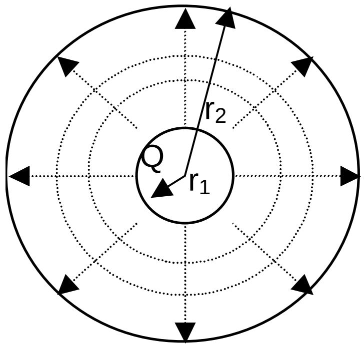


Fig. 81-13 Kugelkondensator

Gegeben seien zwei konzentrische Kugeln mit den Radien r_1 und r_2.

Das Feld zwischen den beiden Kugeln ist

$$E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r^2} \qquad \text{und es wird}$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

damit wird

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \qquad (81\text{-}19)$$

Wird der Radius r_2 der äusseren Kugel sehr gross ($r_2 \to \infty$) gemacht, erhalten wir die Kapazität einer Kugel zum Raum $C = 4\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r_1$.

81.3.3 Zylinderkondensator

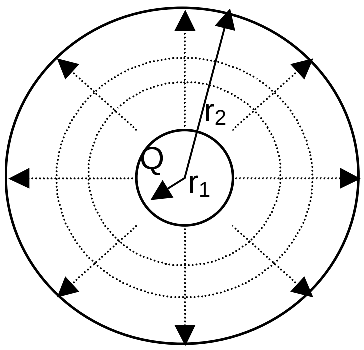


Fig. 81-14 Zylinderkondensator

Gegeben seien zwei konzentrische Zylinder mit den Radien r_1 und r_2 und der Länge ℓ.

Das Feld zwischen den beiden Zylindern ist

$$E = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r \cdot \ell} \qquad \text{und es wird}$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot r \cdot \ell} \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

damit wird

[23] Vgl. auch Kapitel 5.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad (81\text{-}20)$$

Bei Koaxialkabeln wird die Kapazität normalerweise pro Längeneinheit (m oder km) ausgedrückt. Wir sprechen dann von einem Belag, dem Kapazitätsbelag C'.

81.4 Energie und Kraft im elektrostatischen Feld

Im Feld eines geladenen Kondensators ist Energie gespeichert. Diese Arbeit lässt sich bestimmen.

Die pro Zeiteinheit zugefügte Energie ergibt sich zu

$$dW = u(t) \cdot i(t) \cdot dt = u(t) \cdot C \cdot du(t) \qquad (81\text{-}21)$$

Damit wird die dem Kondensator insgesamt zugeführte Energie

$$W = \int dW = C \cdot \int_0^U u \cdot du = \frac{C \cdot U^2}{2} \qquad (81\text{-}22)$$

81.4.1 Kraftwirkung am Plattenkondensator

Die beiden Platten ziehen sich mit der Kraft F an. F ergibt sich zu

$$F = \frac{W}{d} = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2 \cdot d^2} \qquad (81\text{-}23)$$

81.4.2 Energiedichte

Beim betrachteten Kondensator ist die Energie im Feld gespeichert. In vielen Fällen interessiert die Energiedichte **w** in elektrischen Feldern.
Betrachten wir ein kleines Volumenelement dV und die darin enthaltene Energie dW, ergibt sich die Energiedichte **w** aus dem Verhältnis von dW zu dV.

$$w = \frac{dW}{dV} \qquad (81\text{-}24)$$

Im homogenen Feld ist die Energiedichte überall gleich gross. Im betrachteten Plattenkondensator wird darum die Energiedichte **w** zu

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{E \cdot D}{2} \qquad (81\text{-}25)$$

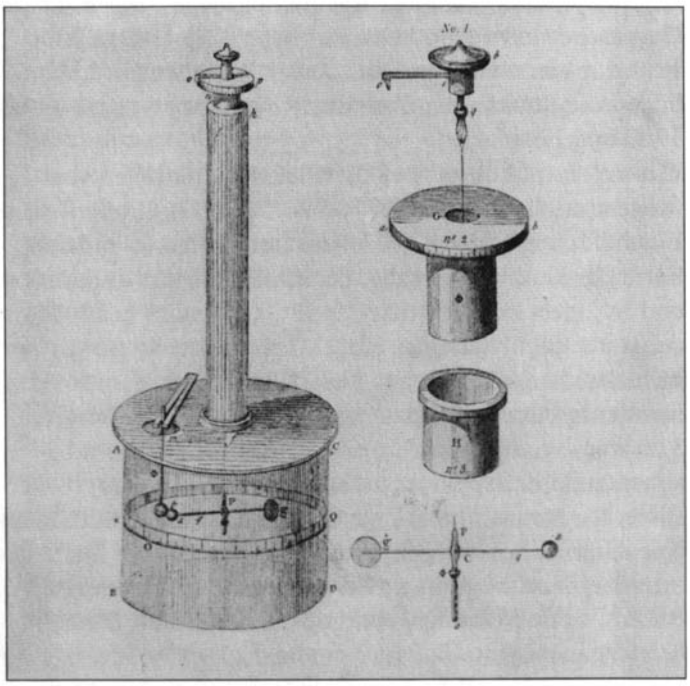
81.4.3 Coulomb und das Mass für die Kapazität

Charles Auguste COULOMB (1736 - 1806) beschreibt 1785 in der ersten seiner sieben grossen „Abhandlungen über die Elektrizität und den Magnetismus“ das in der Geschichte erste Gesetz im Gebiet der Elektrotechnik. Der französische Naturwissenschafter findet:

„Aus den obigen Untersuchungen ergibt sich:
1. Dass sowohl die abstossenden wie die anziehenden Wirkungen zweier elektrisierter Kugeln und folglich zweier elektrischer Moleküle im geraden Verhältnis der Dichtigkeiten des elektrischen Fluidums der beiden elektrisierten Moleküle und im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung steht.
2. ...   3. ...
4. Dass die anziehende und abstossende Kraft des magnetischen Fluidums genauso wie beim elektrischen Fluidum in geradem Verhältnis zu den Dichtigkeiten und im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernungen steht.“

Die Existenz unterschiedlicher, das heisst positiver und negativer Ladung hat Charles François du FAY (1698 – 1739) bereits 1733 in den „Mémoires sur l'électricité“ dargestellt. Du Fay unterschied die „glasige“ und die „harzige“ Elektrizität.

Ein Mass für die Ladung findet Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855) als Produkt aus Strom und Zeit.



Die Coulombsche Drehwaage aus dem Jahre 1785

Fig. 81-15 Versuchsanordnung von Coulomb.

Als Speicher für die Ladung gilt die Kapazität mit dem Symbol C. Lange Zeit war 1cm das Grundmass für die Grösse eines Ladungsspeichers.

Das cm als Kapazitätseinheit geht zurück auf Arbeiten von Henry CAVENDISH (1731 – 1810), die erst um 1875 von James Clerk MAXWELL (1831 - 1879) gesichtet werden.

Das Mass sagt aus, welche Kapazität eine Kugel von 1 inch Durchmesser (2,54 cm) und später von 1 cm Radius aufweist (Vgl. Kapitel 81.3.2).

Als Einheit für die Kapazität gilt im SI - System das Farad, dies zu Ehren von Michael FARADAY (1791 - 1867). 1 cm entspricht 1,113 pF.

81.5 Das elektrische Strömungsfeld

81.5.1 Feldgrössen im Strömungsfeld

Das Strömungsfeld ist eine Beschreibung der Ladungsbewegung in elektrischen Leitern. Gegeben sei eine Metallplatte, die in zwei Punkten mit einer Ladungsquelle verbunden ist:

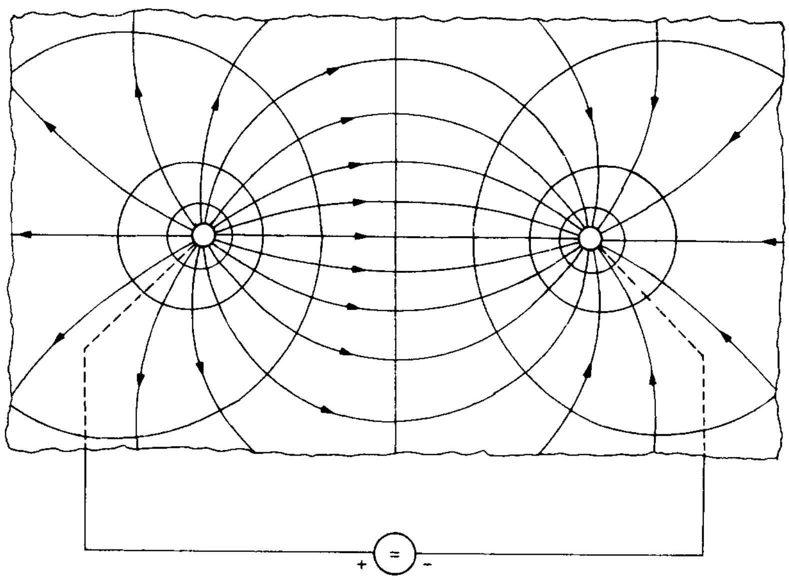


Fig. 81-16 Strömungsfeld in Metallplatte. (Aus [L 81-4])

Die Feldlinien von + zu – sind Strömungslinien. Punkte mit gleichbleibendem Potential zu + oder – bilden Äquipotenziallinien. Die Äquipotenziallinien verlaufen normal zu den Strömungslinien.
Für die weitere Betrachtung wird dem Strömungsfeld ein infinitesimal kleines Volumenelement entnommen.

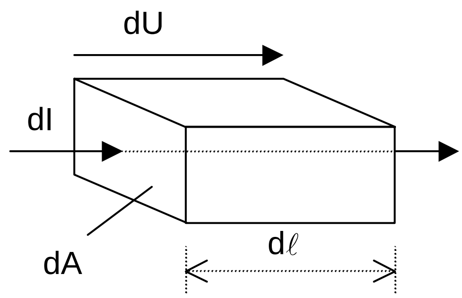


Fig. 81-17 Infinitesimales Volumenelement im Strömungsfeld

Nach dem Gesetz von OHM besteht am Volumenelement die Beziehung dU =

R·dI. R ist der Widerstand mit $R = \rho \cdot \frac{d\ell}{dA}$.

Weiter gilt im elektrostatischen Feld dU = E·dℓ.
Mit der Stromdichte J wird dI = J·dA.

Zusammengeführt ergibt sich

$$dU = E \cdot d\ell = R \cdot dI = \frac{\rho \cdot d\ell}{dA} \cdot J \cdot dA$$

$$E = \rho \cdot J \qquad (81\text{-}26)$$

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$$

Damit ist das OHM' sche Gesetz des Strömungsfeldes gefunden.

Es gilt

$$U_{1,2} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad (81\text{-}27)$$

auch im Strömungsfeld und zudem ist

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \qquad (81\text{-}28)$$

81.5.2 Leistung im Strömungsfeld

Im Volumenelement nach Fig. 81-17 mit dV = dA·dℓ beträgt die Leistung dP = dU·dI. Diese Leistung wird im leitenden Material in Wärme umgesetzt.

Damit wird

$$\frac{dP}{dV} = \frac{dU \cdot dI}{dA \cdot d\ell} = \frac{E \cdot d\ell \cdot J \cdot dA}{dA \cdot d\ell} = E \cdot J$$

$$\frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J} \qquad (81\text{-}29)$$

Die pro Volumenelement umgesetzte Leistung ist gleich dem Produkt aus elektrischer Feldstärke und Stromdichte.

Für einen leitenden Körper wird

$$P = \iiint_V E \cdot J \cdot dV$$

$$P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV \qquad (81\text{-}30)$$