Berner Fachhochschule BFH
Hochschule für Technik und Informatik HTI
Fachbereich Elektro- und Kommunikationstechnik EKT

Elektrotechnik Grundlagen

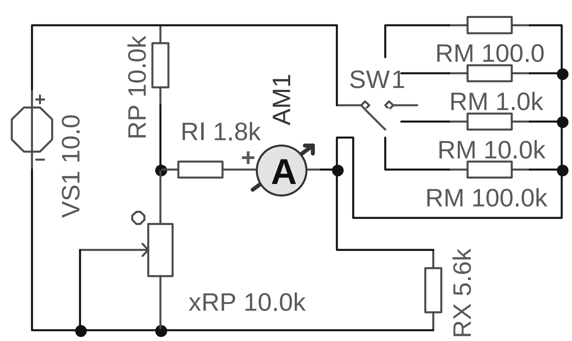
Kapitel 3

Berechnung von Schaltungen (Knoten und Maschen)

2004
Kurt Steudler

(/Modul_ET1_Kap_03.doc)

Inhaltsverzeichnis



3 Die Berechnung von Schaltungen (Knoten und Maschen)

Es sollen umfangreiche **Netzwerke** berechnet werden. Ein Netzwerk besteht aus zwei oder mehr **Elementen**. Elemente sind Widerstände und Quellen.

Gesucht sind die Spannungen an den Elementen und die Ströme durch die Elemente eines gegebenen Netzwerkes.
Diese gesuchten Grössen ergeben sich aus Bestimmungsgleichungen, die für das Netzwerk aufgestellt werden können.

Die Bestimmungsgleichungen ergeben sich aus den KIRCHHOFF‘ schen Sätzen. Die **notwendige** Anzahl der Bestimmungsgleichungen für ein gegebenes Netzwerk wird mit Hilfe der Topologie gefunden.

3.1 Topologie der Schaltungen

Ein einzelnes Element des Netzwerkes sei durch das folgende Symbol dargestellt:

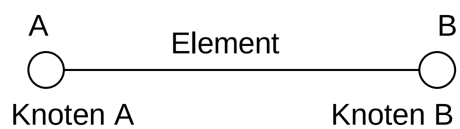


Fig. 3-1 Element in einem Netzwerk

Ein einzelnes Element liegt immer zwischen zwei Knoten. [1]

Zwei oder mehr **Systeme**, das heisst Kombinationen von Elementen (Netzwerke) werden als **separat** oder getrennt bezeichnet, wenn sie untereinander weder Knoten noch Elemente gemeinsam haben.

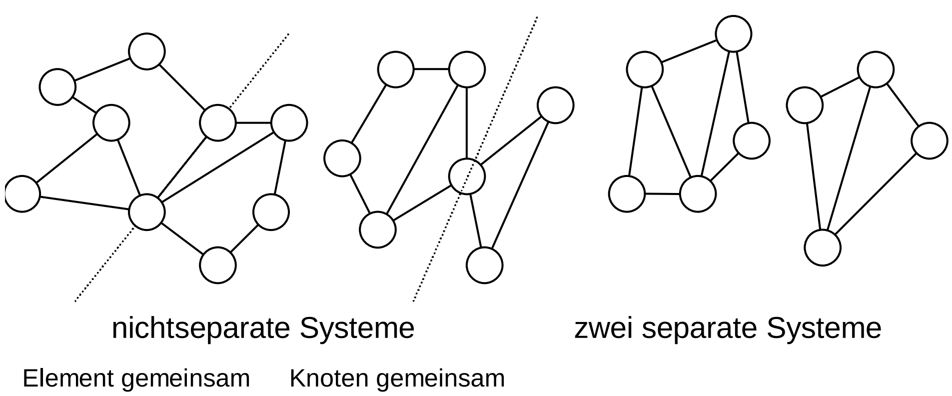


Fig. 3-2 Separate und nichtseparate Systeme oder Netzwerke

[1] Die Topologie ist ein Teilgebiet der Mathematik. Wir setzen die Mathematik als Werkzeug ein und übernehmen nur die mathematischen Erkenntnisse. Auf Herleitungen wird verzichtet.

In der Elektrotechnik betrachten wir immer nur **ein System**, **ein Netzwerk**, **ein separates Teil**.

Für die Anwendung der KIRCHOFF' schen Sätze wird im Netzwerk ein Bezugsknoten, der **Referenzknoten** R bezeichnet.

Die Kombination eines beliebigen Knotens im Netzwerk mit dem Referenzknoten R nennen wir ein Knotenpaar.

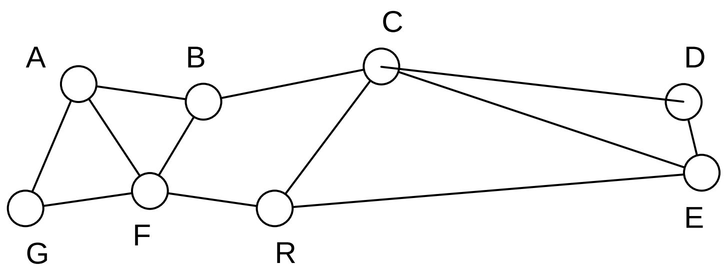


Fig. 3-3 Ein Netzwerk, ein System, ein separates Teil

Aus der Topologie ergeben sich folgende Beziehungen:

Die Anzahl der **unabhängigen Maschen** ist gleich der Anzahl der Elemente, abzüglich der Anzahl der Knoten, zuzüglich die Anzahl der separaten Teile. [2]

Die **Anzahl** der für die Berechnung der unbekannten Ströme und Spannungen **notwendigen Maschengleichungen** ist gleich der Anzahl der unabhängigen Maschen, abzüglich der Anzahl der Stromquellen im Netzwerk. [3]

Die Anzahl der **unabhängigen Knotenpaare** ist gleich der Anzahl der Knoten, abzüglich die Anzahl der separaten Teile. (1 Teil).

Die **Anzahl** der für die Berechnung der unbekannten Ströme und Spannungen **notwendigen Knotengleichungen** ist gleich der Anzahl der unabhängigen Knotenpaare, abzüglich der Anzahl der Spannungsquellen im Netzwerk.

Beispiel

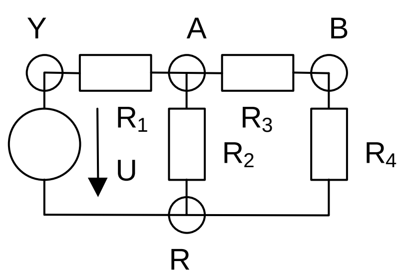


Fig. 3-4 Beispiel zu Knoten und Maschen

[2] Eine Schaltung, ein Netzwerk ist **ein** separates Teil.

[3] Die Elementen sind gegeben.

Anzahl unabhängige Maschen = 5 Elemente (4 Widerstände, 1 Quelle) – 4 Knoten (Y, A, B, R) + 1 separates Teil = 2
Anzahl **benötigte Maschengleichungen** = 2 unabhängige Maschen – 0 Stromquellen = 2

Anzahl unabhängige Knotenpaare = 4 Knoten – 1 separates Teil = 3
Anzahl **benötigte Knotengleichungen** = 3 unabhängige Knotenpaare – 1 Spannungsquelle = 2

Im gegebenen Netzwerk können alle Ströme und alle Spannungen berechnet werden mit entweder zwei Maschengleichungen **oder** zwei Knotengleichungen. [4]

Wir bestimmen hier die unbekannten Grössen aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Das Lösungspaar ergibt sich aus einem linearen Gleichungssystem.

3.2 Knoten- und Maschengleichungen

Grundlage für das Aufstellen von Knoten- und Maschengleichungen sind die KIRCHHOFF‘ schen Sätze.

Bevor die Knotengleichungen **oder** die Maschengleichungen zu einem Netzwerk aufgestellt, angesetzt werden, sind folgende Punkte abzuklären:

- Welche Grössen sind gegeben ? Welche Grössen sind gesucht ?
- Ist alles sauber angeschrieben ? (Elemente, Ströme, Spannungen)
- Wieviele Knotengleichungen oder wieviele Maschengleichungen sind nötig ? Gewählt wird jener Ansatz, der weniger Gleichungen erfordert.
- Welches sollen die unbekannten Grössen sein ? (Ströme, Spannungen). Die Anzahl der unbekannten Grössen entspricht der Anzahl notwendige Gleichungen.

3.2.1 Knotengleichungen (Knotenpunktverfahren)

In einem Netzwerk ist zu unterscheiden zwischen

- den fest gegebenen Strömen I_n (Ströme aus Stromquellen),
- den unbekannten Strömen I_x und
- den übrigen Strömen I_k , die aus den Lösungen für I_x kombiniert werden.

Angesetzt werden die Knotengleichungen in den betrachteten Knoten [5] aus

$$\sum_{i=1}^{n} I_{i\,\text{zufliessend}} = \sum_{k=1}^{m} I_{k\,\text{wegfliessend}} \qquad (3\text{-}1)$$

[4] Entweder oder besagt, dass die beiden Methoden im Ansatz nie vermischt werden dürfen.
[5] Die Anzahl der betrachteten Knoten entspricht der Anzahl der notwendigen Gleichungen.

Die so entstehenden Gleichungen enthalten zunächst zuviele unbekannte Ströme. Durch den Einbezug der gegebenen Elemente und mit Hilfe des Gesetzes von OHM werden die Ströme ersetzt mit I = U/R

Für das Aufstellen von Knotengleichungen wird ein Referenzknoten **R** bezeichnet. Die Spannungen U_k über jenen Elementen, die nicht mit dem Referenzknoten verbunden sind, werden ersetzt durch Spannungen, die auf den Referenzknoten bezogen sind.

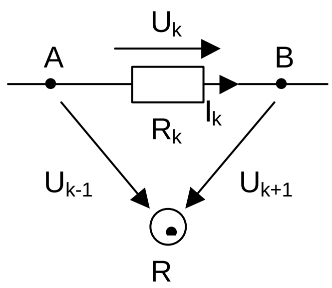


Fig. 3-5 Referenzknoten

Es gilt mit dem Maschensatz

$$U_k = U_{k-1} - U_{k+1}$$

Damit wird der im Knoten A wegfliessende und im Knoten B zufliessende Strom aus dem Element R_k zu

$$I_k = \frac{U_{k-1} - U_{k+1}}{R_k} = \left(U_{k-1} - U_{k+1}\right) \cdot G_k$$

3.2.2 Maschengleichungen (Maschenstromverfahren)

In einem Netzwerk ist zu unterscheiden zwischen

- den fest gegebenen Spannungen U_n (Spannungsquellen),
- den unbekannten Spannungen U_x und
- den übrigen Spannungen U_k , die aus den Lösungen für U_x kombiniert werden.

Angesetzt werden die Maschengleichungen in den betrachteten Maschen [6] aus

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

Die so entstehenden Gleichungen enthalten zunächst zuviele unbekannte Spannungen.
Durch den Einbezug der gegebenen Elemente und mit Hilfe des Gesetzes von OHM werden die Spannungen ersetzt mit $U = I{\cdot}R$

Für das Aufstellen der Maschengleichungen wird in jeder Masche M_k ein Maschenstrom I_k bezeichnet. Dieser Maschenstrom fliesst durch jedes Element der Masche.
Die Ströme I_i, die selber nicht Maschenströme sind, werden ausgedrückt in den Maschenströmen I_k .

[6] Die Anzahl der betrachteten Maschen entspricht der Anzahl der notwendigen Gleichungen.

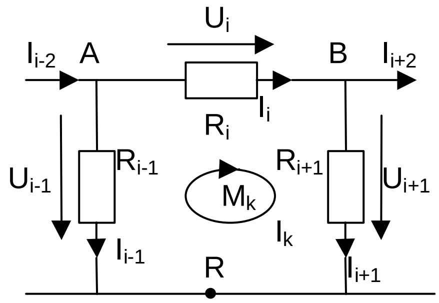


Fig. 3-6 Maschenstrom

Es gilt mit dem Maschensatz

$$U_i + U_{i-1} + U_{i+1} = 0$$

Es ist $I_i = I_k$ = Maschenstrom. Damit werden mit dem Knotensatz $I_{i+1} = I_k - I_{i+2}$ und $I_{i-1} = I_{i-2} - I_k$ und daraus für die Masche M_k

$$I_k \cdot R_i + (I_k - I_{i+2}) \cdot R_{i+1} - (I_{i-2} - I_k) \cdot R_{i-1} = 0$$

oder

$$(R_{i-1}+R_i+R_{i+1}) \cdot I_k - R_{i-1} \cdot I_{i-2} - R_{i+1} \cdot I_{i+2} = 0$$

3.2.3 Ansatz mit Knoten und Maschen: Beispiel

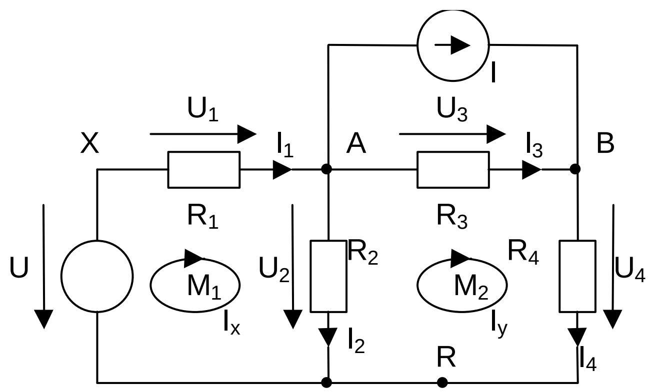


Fig. 3-7 Beispiel zum Knoten- und Maschenansatz

Gegeben sind die Grössen R_1, R_2, R_3, R_4, U und I.
Gesucht werden der Strom $I_4 = I_y$ durch den Widerstand R_4 und die Spannung $U_4 = U_y$ über dem Widerstand R_4.

Zunächst wird die Anzahl der notwendigen Gleichungen bestimmt:
Anzahl der nötigen Maschengleichung = 6 – 4 + 1 – 1 = 2
Anzahl der nötigen Knotengleichungen = 4 – 1 – 1 = 2

Beide Ansätze benötigen gleich viele Gleichungen. Wir benutzen das Beispiel daher, um beide Verfahren näher darzustellen.

3.2.3.1 Der Knotenansatz (Knotenpunktverfahren)

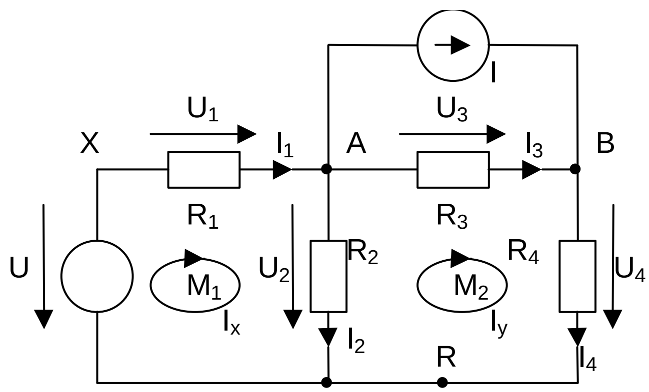


Fig. 3-8 Beispiel zum Knotenpunktverfahren

Im Knoten A gilt: $I_1 = I_2 + I_3 + I$ (I ist eine Stromquelle und gegeben)
Im Knoten B gilt: $I_3 + I = I_y$

Der Knoten X kann für einen Ansatz nicht verwendet werden, da seine Spannung gegenüber dem Referenzpunkt R konstant U ist.

Daraus wird mit den beiden als Unbekannte bezeichneten Spannungen U_2 und U_y, die je zum Referenzpunkt zeigen

Im Knoten A : $$\frac{U - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_y}{R_3} + I \quad \text{und}$$

im Knoten B : $$\frac{U_2 - U_y}{R_3} + I = \frac{U_y}{R_4}$$

Für das Auffinden der Beziehungen zwischen den als unbekannt bezeichneten Spannungen und den übrigen Spannungen wird der Maschensatz verwendet.

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot U_2 + \frac{1}{R_3} \cdot U_y = I - \frac{1}{R_1} \cdot U \\ \qquad -\frac{1}{R_3} \cdot U_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \cdot U_y = I \end{array} \right|$$ [7]

oder

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} + & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U}{R_1} - I \\ I \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}3)$$ [8]

[7] Form, die unmittelbar aus dem praktischen Ansatz entsteht.
[8] In der Mathematik übliche Matrizenschreibweise.

Die gesuchte Grösse $U_y = U_4$ wird [9, 10] (formale Lösung) [11]

$$U_4 = R_4 \cdot \frac{U \cdot R_2 + I \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) + R_1 \cdot R_2} \tag{3-4}$$

3.2.3.2 Der Maschenansatz (Maschenstromverfahren)

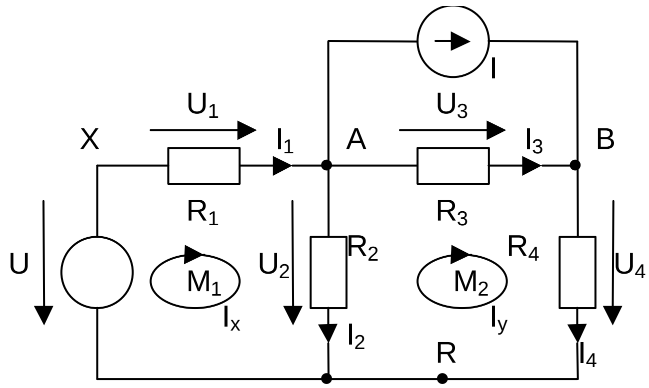


Fig. 3-9 Beispiel zum Maschenstromverfahren

Das Gleiche Beispiel soll mit dem Maschenansatz nachvollzogen werden:

Entlang der Masche 1 gilt : $U_1 + U_2 – U = 0$ (U ist eine Spannungsquelle)
Entlang der Masche 2 gilt : $U_3 + U_y – U_2 = 0$

Der Strom I der Stromquelle wird durch eine Hilfsmasche in das System gebracht. Er wird durch R_3 zurückgeführt.

Daraus wird mit den beiden als Unbekannte bezeichneten Strömen I_x und I_y

Entlang der Masche 1 : $I_x \cdot R_1 + (I_x – I_y) \cdot R_2 – U = 0$ und
entlang der Masche 2 : $(I_y – I) \cdot R_3 + I_y \cdot R_4 + (I_y – I_x) \cdot R_2 = 0$

Für das Auffinden der Beziehungen zwischen den als unbekannt bezeichneten Strömen und den übrigen Strömen wird der Knotensatz verwendet.

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} (R_1 + R_2) \cdot I_x - R_2 \cdot I_y &=& U \\ -R_2 \cdot I_x + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_y &=& I \cdot R_3 \end{array} \right|$$

9 Angewendet werden: Die CRAMER Regel = Determinantenlösung oder die Regel nach SARRUS. Die Determinantenlösung eignet gut sich für formale Herleitungen bis zu drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Für n = 4 sind bereits ($n^2 \cdot n! – n^2 – 1$) = 399 Operationen nötig, so dass für n > 3 effizientere Verfahren aus der numerischen Mathematik herangezogen werden.

10 SARRUS bis 3 Gleichungen. CRAMER Gabriel, 31.7.1704 – 12.6.1752, schweizer. Mathematiker. Lehrt in Genf und findet Regeln zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

11 Formal bedeutet, dass die gesuchte Grösse in den gegebenen Grössen ausgedrückt wird.

oder

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & +(R_2 + R_3 + R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ I \cdot R_3 \end{pmatrix} \tag{3-5}$$

Die gesuchte Grösse $I_y = I_4$ wird (formale Lösung)

$$I_4 = \frac{U \cdot R_2 + I \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) + R_1 \cdot R_2} \tag{3-6}$$

3.2.4 Hilfsregeln zum Knoten- und Maschenansatz

3.2.4.1 Elemente parallel und seriell zu idealen Quellen

Liegt ein Element parallel zu einer idealen Spannungsquelle, wird es für die Berechnung des Netzwerkes weggelassen, ausser es werde an diesem Element der Strom I = U/R gesucht.

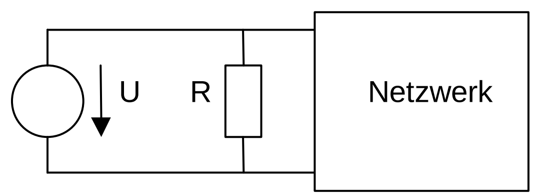


Fig. 3-10 Element parallel zu Spannungsquelle

Liegt ein Element in Serie zu einer idealen Stromquelle wird es für die Berechnung des Netzwerkes weggelassen, ausser wir suchen an diesem Element die Spannung U = R·I.

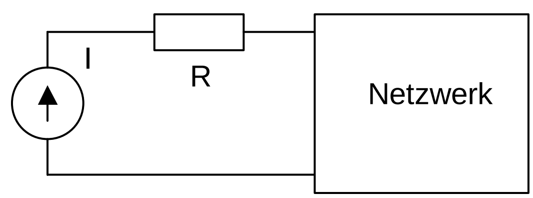


Fig. 3-11 Element in Serie zu Stromquelle

3.2.4.2 Stromquellen im Maschenansatz

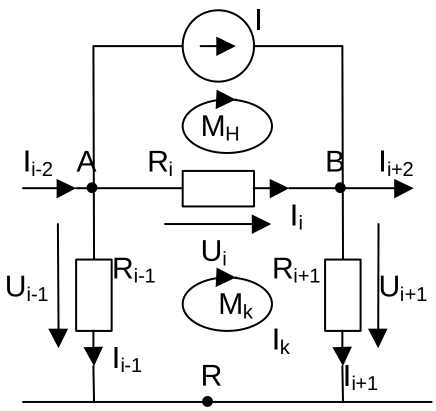


Fig. 3-12 Hilfsmasche für Stromquelle

Der Strom aus einer idealen Stromquelle wird beim Maschenansatz mit einer Hilfsmasche durch das parallel liegende Element zurückgeführt und so in das System einbezogen:

$$I_i = I_k - I$$

Der Strom kann auch durch beliebige Elemente zurückgeführt werden, beispielsweise wenn am parallel liegenden Element etwas gesucht wird.

3.2.5 Numerische Berechnungen

Gleichungssysteme aus Knotengleichungen oder aus Maschengleichungen allgemein, das heisst **formal** nach den unbekannten Grössen aufzulösen ist mit einigem Aufwand verbunden; dies insbesondere, wenn mehr als zwei Gleichungen vorliegen.

Für praktische Anwendungen werden daher oft numerische Berechnungen vorgezogen. Dabei sind zwei Vorgehensweisen denkbar:

- 1 Das Gleichungssystem wird formal gesucht und die gegebenen Werte dort eingesetzt. Anschliessend werden die Lösungen mit Hilfsmitteln (Rechenhilfen, Werkzeuge wie Programme) gefunden.
- 2 Es wird von Anfang an numerisch gerechnet, das heisst die gegebenen Werte fliessen bereits in den Ansatz und werden bis zum Gleichungssystem mitgeführt. Diese Methode hat den Nachteil, dass nur eine bestimmte Situation berechnet vorliegt; ändern einer oder mehrere Werte, muss die ganze Rechnung von Vorne beginnen.

Bei numerischen Rechnung ist anzugeben, in welchen Einheiten eingesetzt wird (V, A, Ω oder V, mA, kΩ und so weiter). Es kann dann unmittelbar mit den Zahlen gerechnet werden und die Resultate erscheinen in der gewählten Einheit.

3.2.5.1 Numerische Rechnung 1

Es sind gegeben die Werte: R_1 = 4,7 kΩ, R_2 = 12 kΩ, R_3 = 680 Ω, R_4 = 3,3 kΩ, U = 7,5 V und I = - 10 mA

Als Dimensionen bieten sich an V, mA und kΩ. Der Widerstand R_3 wird als R_3 = 0,68 kΩ mitgeführt.

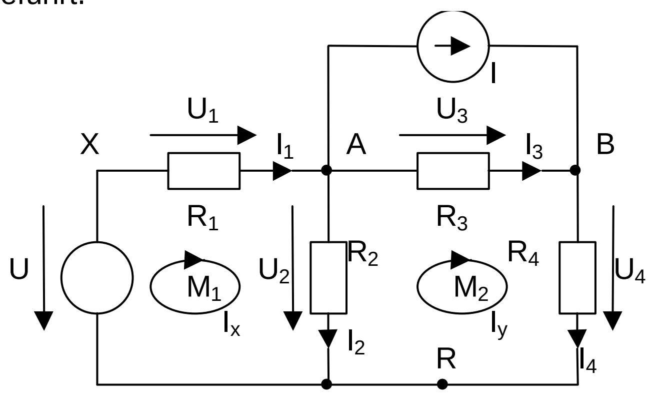


Fig. 3-13 Maschenstromverfahren numerisch 1

Das gegebene Netzwerk ist mit dem Gleichungssystem nach 3.2.3.2 beschrieben.

$$\left| \begin{array}{l} (R_1+R_2)\cdot I_x - R_2 \cdot I_y = U \\ -R_2 \cdot I_x + (R_2+R_3+R_4)\cdot I_y = I\cdot R_3 \end{array} \right|$$

Eingesetzt wird

$$\left| \begin{array}{l} 16{,}7\cdot I_x - 12 \cdot I_y = 7{,}5 \\ -12\cdot I_x + 15{,}98 \cdot I_y = -10\cdot 0{,}68 = -6{,}8 \end{array} \right|$$

Die beiden Lösungen ergeben sich zu

$I_x = I_1$ = 311 µA und $I_y = I_4$ = -192 µA

und damit

U_1 = 1,462 V und $\underline{U_4 = -633{,}6\text{ mV}}$

Die übrigen Spannungen lassen sich nun mit der Maschenregel berechnen

U_2 = 6,04 V und U_3 = 6,67 V

Die negativen Vorzeichen bedeuten, dass die Spannungs- und Strompfeile in Wirklichkeit in der anderen Richtung zeigen, als ursprünglich angenommen.

Werden ein oder mehr Elementwerte verändert, ergibt sich rasch ein neues Gleichungssystem.

3.2.5.2 Numerische Rechnung 2

Es sind gegeben die Werte: R_1 = 4,7 kΩ, R_2 = 12 kΩ, R_3 = 680 Ω, R_4 = 3,3 kΩ, U = 7,5 V und I = - 10 mA

Als Dimensionen bieten sich an V, mA und kΩ. Der Widerstand R_3 wird als R_3 = 0,68 kΩ mitgeführt.

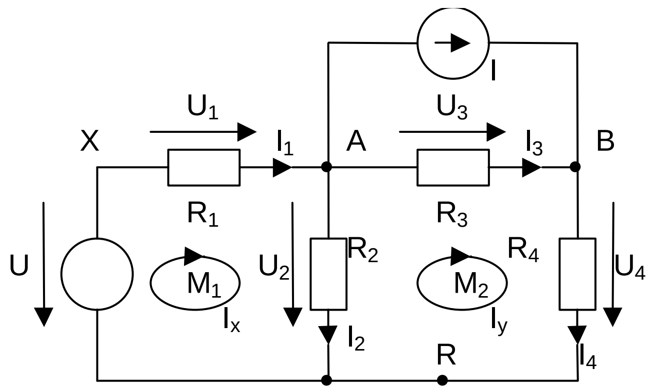


Fig. 3-14 Knotenpunktverfahren numerisch 2

Im Knoten A gilt: $\frac{7{,}5-U_2}{4{,}7}=\frac{U_2}{12}+\frac{U_2-U_y}{0{,}68}-10$ und

im Knoten B gilt: $\frac{U_2-U_y}{0{,}68}-10=\frac{U_y}{3{,}3}$

Für das Auffinden der Beziehungen zwischen den als unbekannt bezeichneten Spannungen und den übrigen Spannungen wird der Maschensatz verwendet.

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{c} -\left(\frac{1}{4{,}7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{0{,}68}\right)\cdot U_2+\frac{1}{0{,}68}\cdot U_y=-10-\frac{1}{4{,}7}\cdot 7{,}5 \\ -\frac{1}{0{,}68}\cdot U_2+\left(\frac{1}{0{,}68}+\frac{1}{3{,}3}\right)\cdot U_y=-10 \end{array}\right|$$

oder

$$\left|\begin{array}{lll} -1{,}7667\cdot U_2 & +\ 1{,}4706\cdot U_y & =-11{,}5957 \\ -1{,}4706\cdot U_2 & +\ 1{,}7736\cdot U_y & =-10 \end{array}\right|$$

Als Lösungen ergeben sich für U_2 = 6,037 V und U_y = <u>U_4 = - 633 µV</u>

Für die Lösung ist [**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**] be-

$$M := \begin{bmatrix} -1.7667 & 1.4706 \\ -1.4706 & 1.7736 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} -11.5957 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{llösen}(M, v) = \begin{bmatrix} 6.037 \\ -0.633 \end{bmatrix}$$

nutzt worden mit

3.2.5.3 Numerische Rechnung 1, Ergänzung

Aus einem formal gefundenen Gleichungssystem lassen sich rasch weitere Lösungen finden, wenn sich Elemente ändern.

Wird beispielsweise der Strom I im vorangehenden Beispiel auf I = - 7,92532 mA gesetzt, zeigt die gesuchte Spannung $U_y = U_4$ mit [**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**] praktisch 0 V.

$R_1 := 4.7 \cdot k\Omega$ $R_2 := 12 \cdot k\Omega$ $R_3 := 680 \cdot \Omega$ $R_4 := 3.3 \cdot k\Omega$ $U := 7.5 \cdot V$ $I := -7.92532$ m

$I_x := 0 \cdot \mu A$ $I_y := 0 \cdot \mu A$ Schätzwerte für die gesuchten Grössen. Zunächst kann hier Null gesetzt werden.

Given Der Befehl "Given" oder "Vorgabe" leitet die zu lösenden Gleichungen ein.

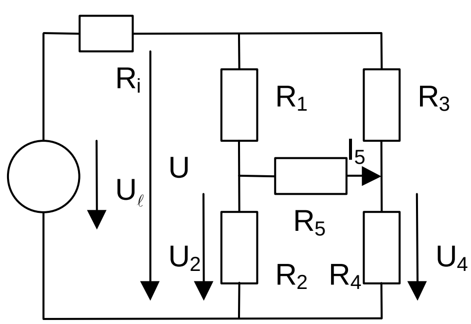
$$(R_1 + R_2) \cdot I_x - R_2 \cdot I_y = U$$

$$-R_2 \cdot I_x + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_y = I \cdot R_3 \qquad \begin{bmatrix} I_4 \\ I_2 \end{bmatrix} := \text{suchen}(I_y, I_x)$$

$$I_4 = 5.378 \cdot 10^{-4} \cdot \mu A \qquad I_2 = 449.102 \cdot \mu A \qquad \mu V := 10^{-6} \cdot V$$

$$U_4 := I_4 \cdot R_4 \qquad U_4 = 1.775 \cdot \mu V$$

3.3 Wheatstone‘ sche Brücke



Die Brücke gilt als abgeglichen, wenn im Widerstand R_5 kein Strom fliesst.

In diesem Fall gelten

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und}$$

$$U_4 = U \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Fig. 3-15 WHEATSTONE - Brücke

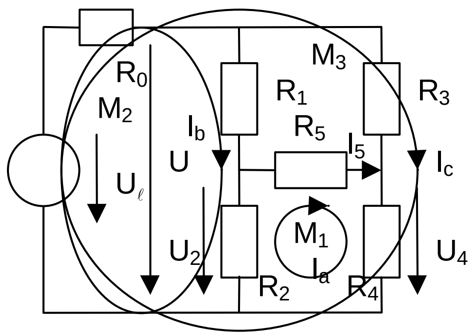
Die abgeglichene Brücke wurde bereits im Kapitel 2 behandelt. [12] Uns interessiert an dieser Stelle das Verhalten des Stromes I_5 im nicht abgeglichenen Zustand. Dieses Verhalten interessiert, wenn einer der Widerstände R bis R variieren kann und der abgeglichene Zustand verlassen wird. Beispiele: Dehnmessstreifen – Brücken, Widerstands – Messbrücken.

[12] Sir Charles WHEATSTONE, 6.2.1802 - 19.10.1875, englischer Physiker. Erfand 1837 den Nadeltelegraphen. Entwickelt eine Messbrücke für Gleichstromanwendung.

Der Strom I_5 soll mit einem Knotenansatz oder einem Maschenansatz ermittelt werden. Gegeben sind die Elemente und die Quelle.

Zunächst wird die Anzahl der notwendigen Gleichungen bestimmt:
Anzahl der nötigen Maschengleichung = 7 – 5 + 1 – 0 = 3
Anzahl der nötigen Knotengleichungen = 5 – 1 – 1 = 3

Gewählt wird der Maschenansatz, das Maschenstromverfahren



Es sind folgende Maschen gelegt

M_1 durch R_5 und R_4 und R_2 : I_a
M_2 durch R_0 und R_1 und R_2 : I_b
M_3 durch R_0 und R_3 und R_4 : I_c

Der gesuchte Strom $I_5 = I_a$

Fig. 3-16 Beschriftete - Brücke

Das geordnete Gleichungssystem wird zu

$$\left| \begin{array}{rcrcrl} (R_2+R_4+R_5)\cdot I_a & - & R_2 \cdot I_b & + & R_4 \cdot I_c & = 0 \\ -R_2 \cdot I_a & + & (R_0+R_1+R_2)\cdot I_b & + & R_0 \cdot I_c & = U \\ R_4 \cdot I_a & + & R_0 \cdot I_b & + & (R_0+R_3+R_4)\cdot I_c & = U \end{array} \right|$$

oder

$$\begin{pmatrix} (R_2+R_4+R_5) & -\ R_2 & +\ R_4 \\ -R_2 & +\ (R_0+R_1+R_2) & +\ R_0 \\ R_4 & +\ R_0 & +\ (R_0+R_3+R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

und der gesuchte Strom

$$I_a = I_5 = U \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_1}{\begin{array}{c} R_0 \cdot [(R_1+R_3)\cdot(R_2+R_4)+R_5\cdot(R_1+R_2+R_3+R_4)]+ \\ (R_1+R_2)\cdot(R_3\cdot R_4+R_4\cdot R_5+R_5\cdot R_3)+R_1\cdot R_2\cdot(R_3+R_4) \end{array}} \tag{3-8}$$

Auftrag: Leiten Sie das Gleichungssystem her und suchen Sie $I_a = I_5$.

Die beiden gefundenen Formeln gelten allgemein und können daher der wirklichen Brückenschaltung angepasst werden.

Oft kann der Widerstand $R_0 \approx 0$ gesetzt werden (ideale Quelle). Die allgemeine Formel vereinfacht sich dann zu

$$I_a = I_5 \approx U \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_1}{(R_1+R_2)\cdot(R_3\cdot R_4+R_4\cdot R_5+R_5\cdot R_3)+R_1\cdot R_2\cdot(R_3+R_4)}$$

Wird zudem R_5 >> als die übrigen Widerstände, kann mit

$$I_a = I_5 \approx \frac{U}{R_5} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_1}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)} \quad \text{und}$$

$$U_a = U_5 \approx U \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_1}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}$$

gerechnet werden.

3.3.1 Brückenschaltung mit Dehnungsmessstreifen DMS

Dehnungsmessstreifen oder Dehnmessstreifen DMS (Strain Gauges) ändern ihren Widerstand bei einer Längenänderung. DMS werden auf Objekte geklebt, die in ihrer Länge nicht fest bleiben (Brücken, Metallträger, Staumauern, Flugzeugflügel und so weiter). In einer Brückenschaltung werden der Strom I_5, die Spannung U_5 zum Mass für die Längenänderung.

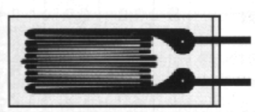
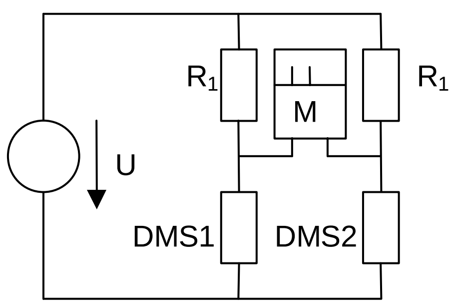
Dehnungsmessstreifen 	Dehnungsmessstreifen (DMS) werden so auf die zur Erfassung von Kräften verwendeten Körper aufgeklebt, dass sie bei Krafteinwirkung gedehnt werden. Dadurch erhöht sich ihr Widerstand linear zur Dehnung. (Der *k*-Faktor gibt das Verhältnis der relativen Widerstandsänderung zur relativen Dehnung an.)	• Temperaturbereich: –270 °C ... 980 °C • Nennwiderstände: 120 Ω; 350 Ω ; 600 Ω; Toleranzen: 0,2 %; 0,5 % • Versorgungsspannung 1V...10 V • *k*-Faktor 2,1; 2,2; 4

Fig. 3-17 Dehnungsmessstreifen aus [L 3-3]



M ist ein hochohmiges Messinstrument, das die Schaltung kaum belastet.
DMS1 ist auf das Objekt geklebt.
DMS2 ist auf gleiches Material geklebt und liegt neben dem sich in der Länge ändernden Objekt. Zweck: Temperaturkompensation der Messanordnung.
Die beiden R_1 sind ähnlich gross wie die DMS.

Fig. 3-18 Brückenschaltung mit DMS

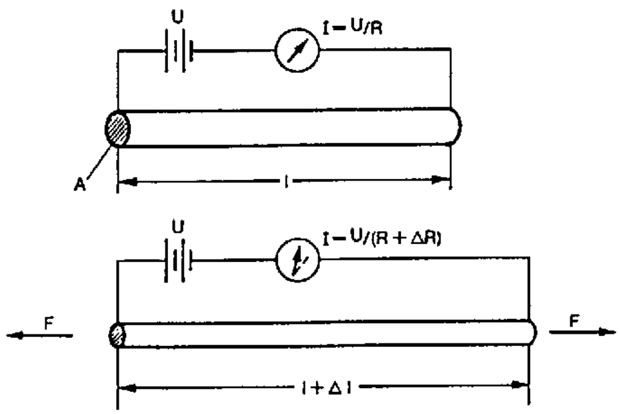
Da R_5 sehr gross ist, darf mit $U_5 \approx U \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_1}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}$ gerechnet werden.

Mit R_1 = p·DMS und $K = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$ wird $\frac{U_5}{U} = \frac{-p \cdot K \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}}{(1+p) \cdot \left(1 + p + K \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}\right)}$

Für $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} << 1$ könnte $\frac{U_5}{U} = \frac{p \cdot K}{(1+p)^2} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}$ gesetzt werden. Diese Vereinfachung wird zu untersuchen sein.

Dehnungsmeßstreifen (DMS)

sind die wichtigsten elektrischen Meßaufnehmer für relative Längenänderungen. Das Prinzip wurde 1856 durch *Lord Kelvin* entdeckt und in den 30er Jahren dieses Jahrhunderts erstmals praktisch angewendet.
Wenn auf einen Leiter mit der Länge l und dem Querschnitt A eine Zugkraft ausgeübt wird, nimmt l zu (Dehnung) und A ab (Querkontraktion, Poisson-Effekt). In Abb. 1 ist der ungedehnte und (stark übertrieben) der gedehnte Leiter gezeichnet. Es leuchtet ein, daß der elektri-



$R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ = Widerstand
l = Länge des Leiters
A = Querschnittsfläche des Leiters
ϱ = spezifischer Widerstand

$K = \frac{\Delta R/R}{\Delta l/l} = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon}$ = Empfindlichkeit des DMS („K-Faktor“)

$\Delta R/R$ = relative Widerstandsänderung
$\Delta l/l = \varepsilon$ = relative Längenänderung (Dehnung)
F = angreifende Zugkraft

Abb. 1: *Grundlagen des DMS*

sche Widerstand des gedehnten Leiters größer wird, weil dieser länger und dünner geworden ist. Weiterhin ändert sich aufgrund der im Material auftretenden mechanischen Spannung auch der spezifische Widerstand. Dieser Effekt ist bei den üblichen Widerstandsmaterialien gering, so daß die Widerstandsänderung hauptsächlich von der Formänderung verursacht ist. Bei Halbleiter-DMS überwiegt jedoch der Einfluß des veränderten spezifischen Widerstandes. Soweit das Leitermaterial nicht überdehnt wird, gilt ein linearer Zusammenhang zwischen der relativen Widerstandsänderung $\Delta R/R$ und der Dehnung ε:

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \frac{\Delta l}{l} = K \cdot \varepsilon$$

Dabei ist K die Empfindlichkeit des DMS. Übliche Werte für K liegen bei Metall-DMS zwischen 2 und 4, bei Halbleiter-DMS können Werte zwischen −100 und +180 erreicht werden.

3.3.1.1 Linearität der Messung

Die Formel $u = \frac{U_5}{U} = \frac{-p \cdot K \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}}{(1+p)\cdot\left(1+p+K\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)} = \frac{-p\cdot K\cdot\varepsilon}{(1+p)\cdot(1+p+K\cdot\varepsilon)}$ zeigt, dass sich die Spannung U_5 nicht linear zur Längenänderung des Objektes verhält.

$\varepsilon := -0.5, -0.49 .. 0.5 \quad p := 1 \quad K := 2$

$u(\varepsilon) := \frac{p\cdot K\cdot\varepsilon}{(1+p)\cdot(1+p+K\cdot\varepsilon)} \quad u1(\varepsilon) := \frac{p\cdot K\cdot\varepsilon}{(1+p)^2}$

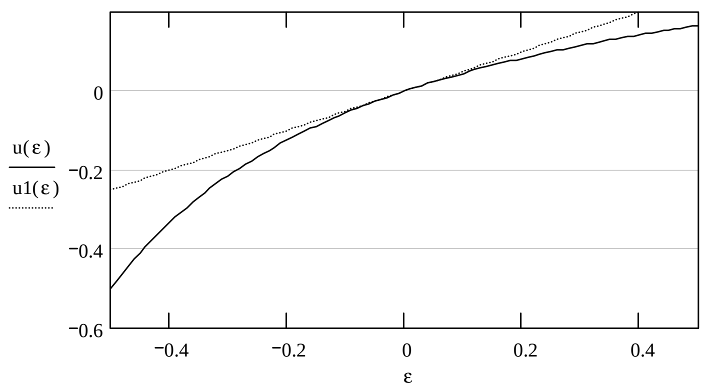


Fig. 3-19 Spannungsänderung zu Längenänderung [Mit L 3-2]

3.3.1.2 Fehlerbetrachtung

Es stellt sich die Frage, mit welchem Fehler die nichtlineare Kennlinie vom linearen Verhalten nach $u1 = \frac{U_5}{U} = \frac{p\cdot K}{(1+p)^2}\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{p\cdot K}{(1+p)^2}\cdot\varepsilon$ abweicht.

Der relative Fehler ergibt sich aus (u - u1)/u und wird

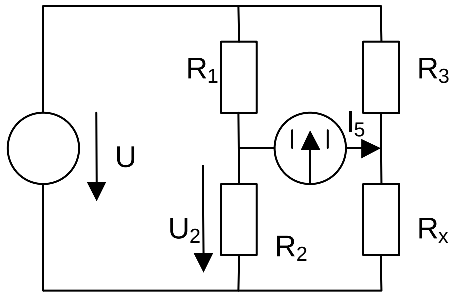
$$\text{Linearitätsfehler} = -\frac{K\cdot\varepsilon}{1+p}$$

Der Fehler ist proportional zur relativen Längenänderung und liegt in ähnlicher Grösse. Es darf daher nicht linearisiert werden. Abhilfe schaffen Korrekturkurven oder elektronische Korrekturverfahren.

Zudem stellt sich die Frage, welcher Wert für p den höchstmöglichen U_5 Wert zulässt.
Ein analytischer Ansatz zeigt, dass dieses Optimum bei p = 1 liegt, das heisst die Widerstände haben den gleichen Wert wie die DMS.

3.3.2 Brückenschaltung zur Widerstandsmessung

Die Brückenschaltung nach WHEATSTONE eignet sich zur Messung von Widerständen.



Der Widerstand R_5 ist ersetzt mit einem Drehspulmessinstrument, das den abgeglichen Zustand $I_5 = 0$ anzeigt.
Der Widerstand R_4 stellt den unbekannten Widerstand R_x dar.
Die Widerstände R_1 bis R_3 lassen sich so wählen, dass $I_5 = 0$ wird. R_x ist dann berechenbar oder ablesbar.

Fig. 3-20 Widerstandsmessung

Suchen Sie eine Schaltung die es ermöglicht, Widerstände im Bereich von 10 Ω bis 1 MΩ einfach zu bestimmen. (Schaltung = Schema = Stromlaufplan).
Der gesuchte Widerstand R_x soll ohne zusätzlichen Rechenaufwand unmittelbar ablesbar sein.
Das eingesetzte Messinstrument darf nie überlastet werden.

Material

Für eine Verwirklichung darf mit dem aufgeführten Material gerechnet werden.

Quelle:	Flachbatterie 4,5 V, $R_i < 2\ \Omega$ oder 3 bis 4 Mal 1,5 V UM3 / R6, $R_i < 2\ \Omega$
Anzeige:	Drehspulinstrument mit Nullpunkt in der Mitte (Rechteckindikator), ± 100 µA, 1750 Ω.
Widerstände:	Reihe E – 12, 10 Ω bis 1 MΩ, ¼ Watt, 1% Einstellbare Widerstände (Potentiometer), Bereich von 100 Ω bis 100 kΩ, einfach oder mehrfach.
Schalter:	Stufenschalter, Kippschalter, Impulstaster nach freier Wahl.

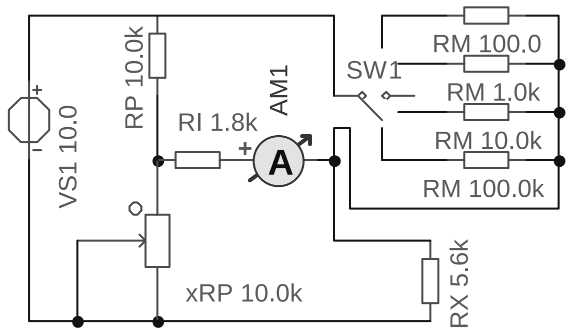
Erwartet wird

- einem Schema, das die gegebenen Anforderungen erfüllt,
- allen nötigen Berechnungen und Beschreibungen,
- knappen Vorschlägen zu einer Verwirklichung des Ohm – Meters.

Die Aufzählung ist nicht abschliessend.

Widerstands – Messbrücke

Der unbekannte Widerstand R_X soll durch variieren des Potentiometers R_P bestimmt werden.

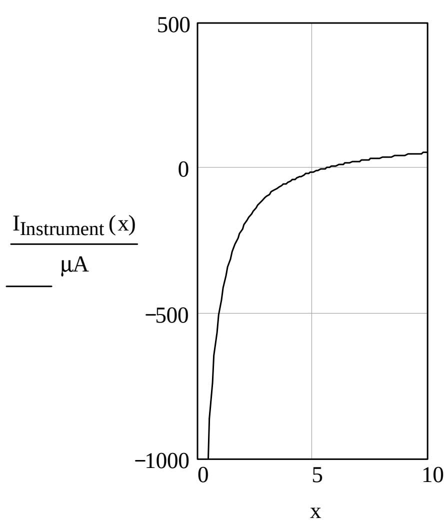


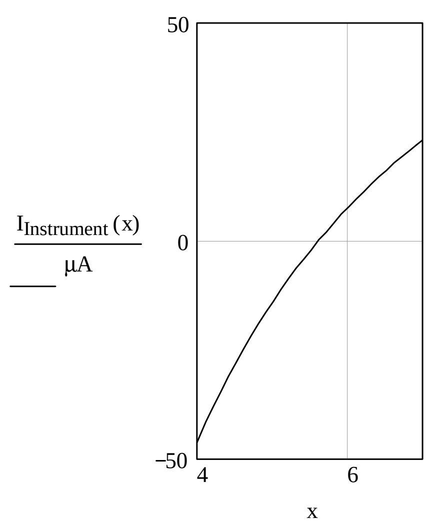
Beispiel zum Verhalten des Instrumentenstroms

$U := 10 \cdot V \qquad R_P := 10 \cdot k\Omega \qquad R_M := 1 \cdot k\Omega \qquad R_I := 1.8 \cdot k\Omega \qquad R_X := 5.6 \cdot k\Omega$

$x := 0, 0.1 .. 10$

$$I_{Instrument}(x) := U \cdot \frac{x \cdot R_M - R_X}{x \cdot R_P \cdot \left(R_M + R_X\right) + (1 + x) \cdot R_M \cdot R_X + (1 + x) \cdot \left(R_M + R_X\right) \cdot R_I}$$





3.4 Verzeichnisse

3.4.1 Literaturverzeichnis

L 3-1 Frohne Heinrich, Löcherer Karl-Heinz und Müller Hans, Grundlagen der Elektrotechnik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1996, ISBN 3-519-46400-4.

L 3-2 MATHCAD® 2000. Mathematiksoftware, die sich für numerische Rechnungen und Laborauswertungen eignet.

L 3-3 Tabellenbuch Informations- und Telekommunikationstechnik, Verlag Dr. Max Gehlen, Bad Homburg vor der Höhe, 1998, ISBN 3-441-92102-x

3.4.2 Figurenverzeichnis

3.4.3 Stichwortverzeichnis