Berner Fachhochschule BFH
Hochschule für Technik und Informatik HTI
Fachbereich Elektro- und Kommunikationstechnik EKT

Elektrotechnik Grundlagen

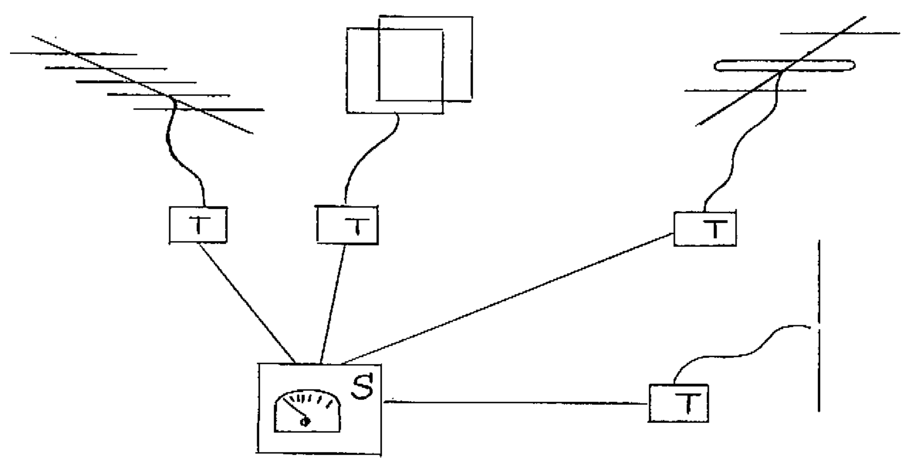
Kapitel 4

Theoreme

2004
Kurt Steudler

(/Modul_ET1_Kap_04.doc)

Inhaltsverzeichnis



4 Theoreme

Mit Hilfe des OHM‘ schen Gesetzes und der KIRCHHOFF’ schen Sätze lassen sich sämtliche Netzwerke berechnen.
Trotzdem erweisen sich verschiedene zusätzliche Rechenmethoden oder **Theoreme** für praktische Anwendungen als nützlich.

4.1 Die π - T (Y - Δ) Transformation

Zu einem gegebenen π - oder Δ - Netzwerk soll ein T - oder Y – Netzwerk gefunden werden, das an den Klemmen x, y und z die gleichen Eigenschaften aufweist.

In gleicher Weise soll zu einem T - oder Y – Netzwerk ein entsprechendes π - oder Δ - Netzwerk gefunden werden.

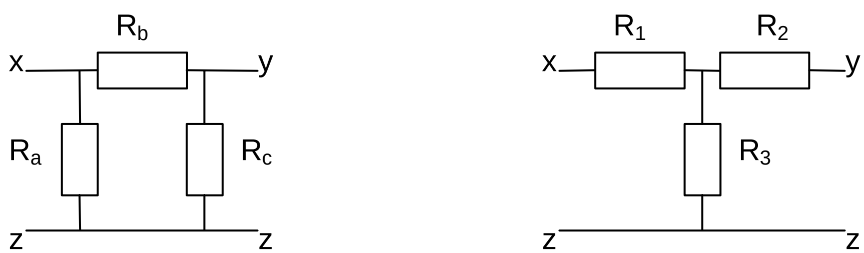


Fig. 4-1 Das π – Glied und das T - Glied

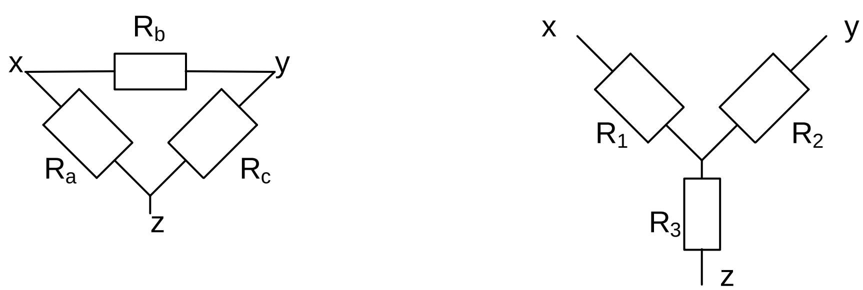


Fig. 4-2 Das Δ – Glied und das Y – Glied (Dreieck – Stern)

Von π - und T – Netzwerken sprechen wir in der Kommunikationstechnik, von Δ – und Y - Netzwerken in der Energietechnik.

Damit die beiden Glieder die gleichen Eigenschaften aufweisen, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\pi) &= R_{xy}(T) & & R_{xy}(\Delta) = R_{xy}(Y) \\ R_{xz}(\pi) &= R_{xz}(T) & \text{und} \quad & R_{xz}(\Delta) = R_{xz}(Y) \\ R_{yz}(\pi) &= R_{yz}(T) & & R_{yz}(\Delta) = R_{yz}(Y) \end{aligned} \qquad (4\text{-}1)$$

Aus den drei Bedingungen ergeben sich drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Es ergeben sich die Lösungen

$$R_1 = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_a = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2}$$
$$R_2 = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad \text{und} \quad R_b = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3} \tag{4-2}$$
$$R_3 = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_c = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1}$$

π –T – Transformation oder Δ –Y - Transformation

Jede Impedanz des T (Y) – Gliedes ist gleich dem Produkt der anliegenden π (Δ) Impedanzen, geteilt durch die Summe der π (Δ) Impedanzen. [1]

T - π– Transformation oder Y - Δ –Transformation

Jede Impedanz des π (Δ)– Gliedes ist gleich der Summe der Produkt der Impedanzen der drei möglichen T (Y) Impedanzpaare, geteilt durch die gegenüberliegende T (Y) - Impedanz.

Beispiele

$R_1 := 56 \cdot \Omega \qquad R_2 := 82 \cdot \Omega \qquad R_3 := 47 \cdot \Omega$

$\text{Zähler} := R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1$

$R_a := \frac{\text{Zähler}}{R_2} \qquad R_b := \frac{\text{Zähler}}{R_3} \qquad R_c := \frac{\text{Zähler}}{R_1}$

$R_a = 135.098 \,\Omega \qquad R_b = 235.702 \,\Omega \qquad R_c = 197.821 \,\Omega$

Fig. 4-3 Stern – Dreieck Umwandlung [mit L 4-2]

$R_a := 15 \cdot k\Omega \qquad R_b := 6.8 \cdot k\Omega \qquad R_c := 12 \cdot k\Omega$

$\text{Nenner} := R_a + R_b + R_c$

$R_1 := \frac{R_a \cdot R_b}{\text{Nenner}} \qquad R_2 := \frac{R_b \cdot R_c}{\text{Nenner}} \qquad R_3 := \frac{R_c \cdot R_a}{\text{Nenner}}$

$R_1 = 3.018 \,k\Omega \qquad R_2 = 2.414 \,k\Omega \qquad R_3 = 5.325 \,k\Omega$

Fig. 4-4 Dreieck - Stern Umwandlung [mit L 4-2]

1 Der Begriff Impedanz meint hier die Widerstände R. Dem Begriff Impedanz wird in der Wechselstromtechnik eine erweiterte Bedeutung zukommen. Die angegebenen Formeln gelten auch in der Wechselstromtechnik.

4.2 Das Superpositionsprinzip

Das Prinzip geht zurück auf HELMHOLTZ. [2]

4.2.1 Die „Black Box" („Schwarze Schachtel")

Zwischen zwei Grössen bestehe ein bestimmter Zusammenhang, über den näher nichts bekannt ist (oder der in seinen Einzelheiten nicht von Bedeutung ist).

Solche Fälle können mit dem „Black-Box" – Modell näher geklärt werden.

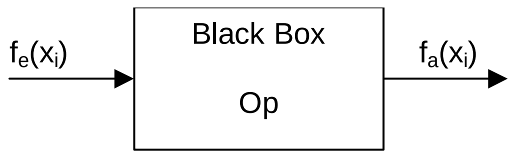


Fig. 4-5 Black - Box

Auf die Eingangsfunktion f_e als Funktion einer oder mehrerer Variablen x_i wird eine Operation **Op** angewendet, die zu einer Ausgangsfunktion f_a der Variablen führt.

Es gilt der Zusammenhang

$$f_a(x_i) = Op\left[f_e(x_i)\right] \tag{4-3}$$

Über die Variable x_i ist nichts ausgesagt. Insbesondere muss es sich nicht um eine mathematisch fassbare Grösse handeln.

4.2.2 Mathematische Aussage zur Linearität

Eine Operation Op ist dann und nur dann linear, wenn gelten

- das Prinzip der Homogenität und

$$Op\left[K \cdot f_e(x_i)\right] = K \cdot f_a(x_i) = K \cdot Op\left[f_e(x_i)\right] \tag{4-4}$$

- das Superpositionsprinzip [3]

$$Op\left[f_{e1}(x_i) + f_{e2}(x_i)\right] = f_{a1}(x_i) + f_{a2}(x_i) \tag{4-5}$$

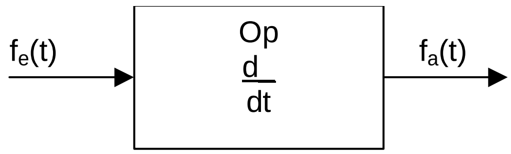
Ist eine Operation linear, dann darf superponiert werden.

---

[2] Hermann Ludwig Ferdinand von HELMHOLTZ, 31.8.1821 – 8.9.1894, deutscher Physiker und Physiologe. Er nimmt 1881 als erster die Existenz von Elektronen an.

[3] Super: über, darüber. Position: Lage, Ort. Superponieren: „übereinanderlegen".

Beispiel



Die Operationen „differenzieren“ und „integrieren“ sind homogen und das Superpositionsprinzip gilt.
Differenzieren und Integrieren sind daher **lineare** Operationen.

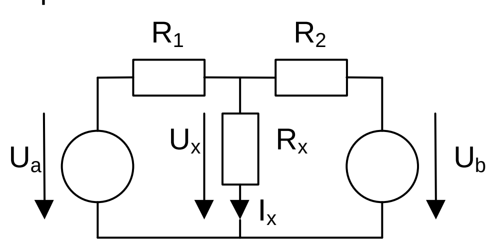
In der Gleichstromtechnik und später in der Wechselstromtechnik sind die Netzwerke linear und es darf superponiert werden.

4.2.3 Anwendung in der Elektrotechnik

Enthält ein Netzwerk **zwei oder mehr Quellen**, können die Grössen am Element (Spannung und Strom) folgendermassen berechnet werden.
Wir betrachten eine Quelle nach der anderen als wirksam (die jeweils übrigen Quellen gelten als unwirksam) und berechnen die Grössen am Element.
Die gesamten Grössen ergeben sich aus der Addition der nacheinander gefundenen Grössen.

Die nicht wirksamen Spannungsquellen sind als Kurzschluss und die nicht wirksamen Stromquellen als Leerlauf zu betrachten.

Beispiel



Gegeben sind die Grössen
U_a, U_b, R_1, R_2, R_x

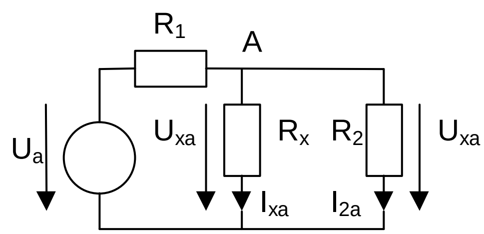
Gesucht wird der Strom I_x durch den Widerstand R_x.

Fig. 4-6 Superposition A

Das Beispiel zeigt zwei Quellen, die auf das Element R_x wirken. Mit dem Superpositionsprinzip lassen wir beide Quellen nacheinander wirksam werden und bestimmen die beiden Teilbeiträge.

Die gesuchten Grössen lassen sich auch mit einem Knotenansatz bestimmen.

a) Es sei die Quelle U_a wirksam (U_b gilt als Kurzschluss)



Im Knoten A gilt

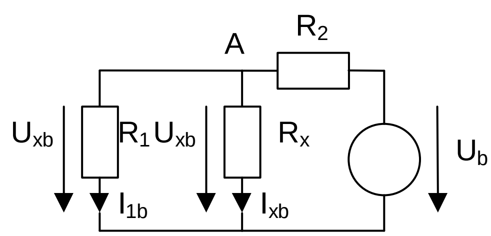
$I_1 = I_{xa} + I_{2a}$ und damit

$$\frac{U_a - U_{xa}}{R_1} = \frac{U_{xa}}{R_x} + \frac{U_{xa}}{R_2} \quad \text{womit}$$

$$I_{xa} = \frac{U_a \cdot R_2}{R_x \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_x}$$

Fig. 4-7 Superposition B

b) Es sei die Quelle U_b wirksam (U_a gilt als Kurzschluss)



Im Knoten A gilt

$I_2 = I_{xb} + I_{1b}$ und damit

$$\frac{U_b - U_{xb}}{R_2} = \frac{U_{xb}}{R_x} + \frac{U_{xb}}{R_1} \quad \text{womit}$$

$$I_{xb} = \frac{U_b \cdot R_1}{R_x \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_x}$$

Fig. 4-8 Superposition C

c) Nun sind beide Quellen wirksam. Es gilt mit dem Superpositionsprinzip

$$I_x = I_{xa} + I_{xb} = \frac{U_a \cdot R_2 + U_b \cdot R_1}{R_x \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_x}$$

Das Superpositionsprinzip eignet sich weniger für formale Herleitungen. Dagegen lassen sich numerische Betrachtungen gut handhaben.

4.3 Das Theorem von Thévenin (Quellenersatzschaltung)

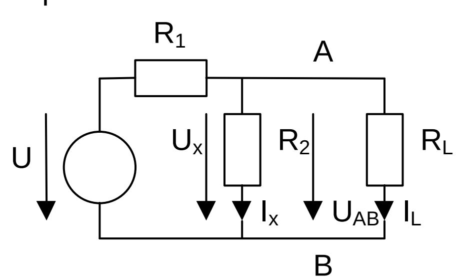
Der Strom durch ein passives Element in einem linearen Netzwerk ist gleich dem Strom der durch das betreffende Element fliesst, wenn dieses an einer realen Quelle, einer **Ersatzquelle** mit der Leerlaufspannung U_{Th} und dem Innenwiderstand R_r liegt.

Dabei ist U_{Th} die Leerlaufspannung zwischen den Anschlusspunkten des Elementes, das heisst jene Spannung die an den Klemmen gemessen werden kann, wenn sich das Element **nicht** in der Schaltung befindet.

R_r ist der von den Anschlusspunkten des Elementes aus nach rückwärts gemessene Widerstand. Das Element ist dabei nicht mit einbezogen.
Für die Bestimmung von R_r gelten Spannungsquellen als Kurzschluss und Stromquellen als Leerlauf.

Die reale Quelle mit U_{Th} und R_r **ersetzt** an den Anschlusspunkten des Elementes die gesamte Schaltung, die ausserhalb des betrachteten Elementes liegt.

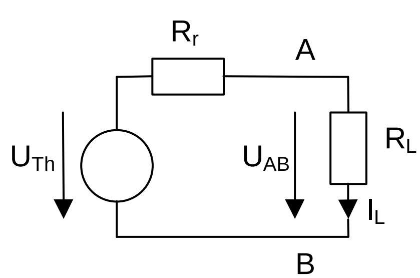
Beispiel



Gegeben sind die Grössen
U, R_1, R_2, R_L

Gesucht wird der Strom I_L durch den Widerstand R_L.

Fig. 4-9 Thévenin



Ohne Element R_L werden

$$U_{AB\ leer} = U_{Th} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_r = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Fig. 4-10 Ersatzquelle nach Thévenin

Fig. 4-10 ersetzt die Schaltung nach Fig. 4-9 und es wird

$$I_L = \frac{U_{Th}}{R_r + R_L} = \frac{U \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_L \cdot (R_1 + R_2)}$$

Jenes Element, an dem etwas gesucht wird, darf nicht in die Umwandlung in eine Ersatzquelle nach Thévenin einbezogen werden.

4.4 Das Theorem von Norton (Quellenersatzschaltung)

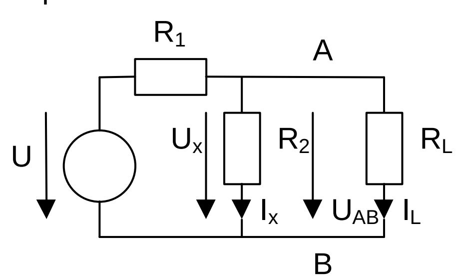
Der Strom durch ein passives Element in einem linearen Netzwerk ist gleich dem Strom der durch das betreffende Element fliesst, wenn dieses an einer realen Quelle, einer **Ersatzquelle** mit dem Kurzschlusstrom I_N und dem Innenwiderstand R_r liegt.

Dabei ist I_N jener Strom, der zwischen den Anschlusspunkten des Elementes fliesst, wenn das Element kurzgeschlossen wird.

R_r ist der von den Anschlusspunkten des Elementes aus nach rückwärts gemessene Widerstand. Das Element ist dabei nicht mit einbezogen.
Für die Bestimmung von R_r gelten Spannungsquellen als Kurzschluss und Stromquellen als Leerlauf.

Die reale Quelle mit I_N und R_r **ersetzt** an den Anschlusspunkten des Elementes die gesamte Schaltung, die ausserhalb des betrachteten Elementes liegt.

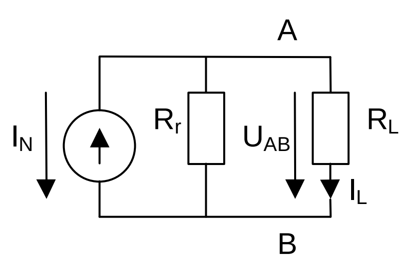
Beispiel



Gegeben sind die Grössen
U, R_1, R_2, R_L

Gesucht wird der Strom I_L durch den Widerstand R_L.

Fig. 4-11 Norton



Ohne Element R_L werden

$$I_{L\ kuzschluss} = I_N = \frac{U}{R_1}$$

$$R_r = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Fig. 4-12 Ersatzquelle nach Norton

Fig. 4-12 ersetzt die Schaltung nach Fig. 4-11 und es wird

$$I_L = I_N \cdot \frac{R_r}{R_r + R_L} = \frac{U \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_L \cdot (R_1 + R_2)}$$

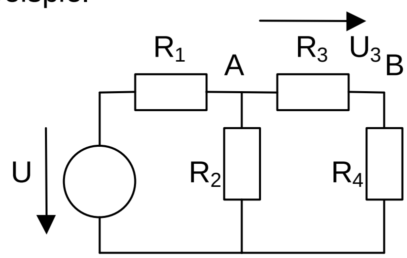
Jenes Element, an dem etwas gesucht wird, darf nicht in die Umwandlung in eine Ersatzquelle nach Norton einbezogen werden.

4.5 Das Substitutionstheorem

Sind ein lineares Element oder eine Gruppe von linearen Elementen an zwei Knoten mit einem linearen Netzwerk verbunden, lässt sich dieses Element oder die Gruppe von Elementen durch ein anderes lineares Element oder eine andere Gruppe von linearen Elementen ersetzen.
Dies gilt, wenn die Spannung zwischen den Knoten und der Strom durch das betrachtete Element oder die Gruppe von Elementen unverändert bleiben.

In stationären linearen Netzwerken darf substituiert werden. [4]

Beispiel

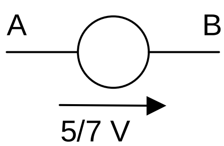


Gegeben sind die Grössen
$U = 5$ V, $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2, = 2\text{k}\Omega$,
$R_3 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 3\ \text{k}\Omega$.

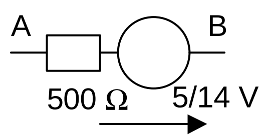
Gesucht wird die Substitution des Elementes R_3 zwischen A und B.

Fig. 4-13 Substitutionstheorem

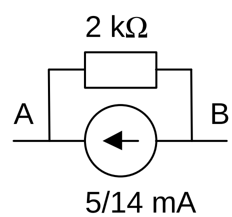
Es errechnen sich $I_3 = 5/7$ mA und $U_3 = 5/7$ V. Das Element R_3 kann ersetzt werden mit



oder



oder



und so weiter

[4] Stationär: zeitunabhängig, gleichbleibend. Substituieren: ersetzen, austauschen.

4.6 Die Leiter - Analyse

Besteht ein lineares Netzwerk aus sich abwechslungsweise folgenden Längs- und Querelementen, dann hat es **Leiterstruktur**.

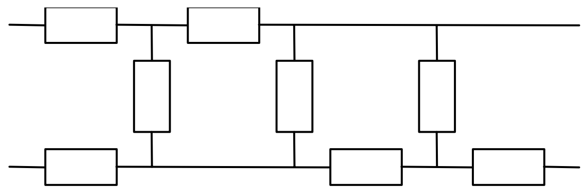
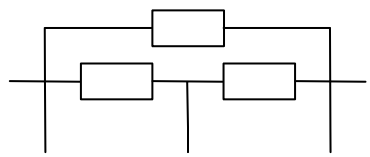


Fig. 4-14 Leiterstruktur

In den Knoten solcher Netzwerke fliessen insgesamt höchstens drei Ströme. (Anzahl zu- und wegfliessender Ströme ≤ 3).

Folgender Fall kann mit der Leiter – Analyse nicht behandelt werden



Vorgehen

Die Spannung am letzten Element oder der Strom durch das letzte Element wird als bekannt angenommen.
Die übrigen Ströme und Spannungen werden Schritt für Schritt vom letzten Element her zum ersten Element hin in der als bekannt angenommenen Grösse ausgedrückt.
Es ergibt sich so eine Beziehung zwischen den bekannten Grössen und den unbekannten Grössen.

Aufgabe

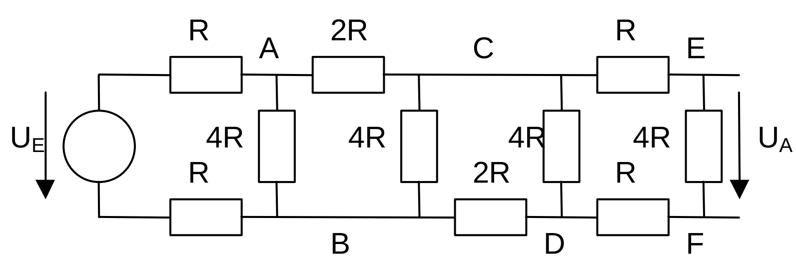


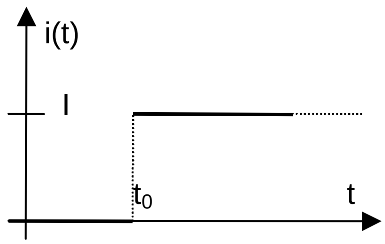
Fig. 4-15 Leiter - Analyse

Wie gross wird das Verhältnis der Spannung U_A zur Spannung U_E ?

4.7 Gleichstromtechnik - Wechselstromtechnik

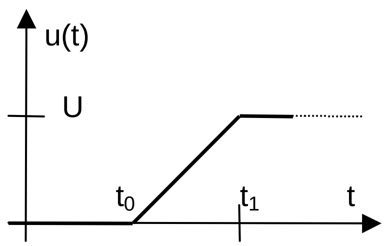
Als Wechselstrom bezeichnen wir Ströme oder Spannungen, die in einer bestimmten Weise von der Zeit t abhängig sind. i = i(t) und u = u(t) [5]
In der Gleichstromtechnik ist der Strom I nicht von der Zeit abhängig. Man spricht von statischen Grössen. [6]

4.7.1 Einmalige Vorgänge



$$i(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \le t_0 \\ I & ; \quad t_0 \le t < \infty \end{cases}$$

Fig. 4-16 Sprungfunktion



$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < t \le t_0 \\ U \cdot \dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0} & ; t_0 \le t \le t_1 \\ U & ; \quad t_1 \le t < \infty \end{cases}$$

Fig. 4-17 Rampe

4.7.2 Periodische Vorgänge

Als Wechselstrom bezeichnen wir üblicherweise Strom- und Spannungsverläufe, die sich in der Zeit wiederholen. Solche Verläufe sind periodisch. [7]

$$\begin{aligned} i &= i(t + n \cdot T) \qquad ; \quad n \in \mathbb{N} \\ u &= u(t + n \cdot T) \qquad ; \; T : \text{Periodendauer} \end{aligned} \tag{4-6}$$

4.7.2.1 Periodische Funktion allgemein

Der im allgemeinen beliebige Verlauf der Funktion wiederholt sich nach der Zeit T, nach der Periodendauer T.

---

5 Zeitabhängige Grössen bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben.
6 Statisch, στατικοζ : stillstehend, ruhend.
7 Periodisch, περιοδικοζ : regelmässig auftretend, wiederkehrend.

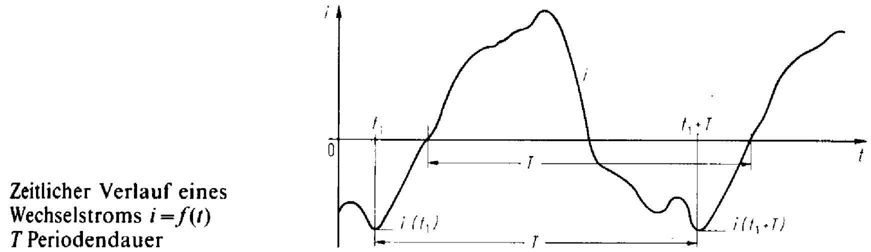


Fig. 4-18 Periodische Funktion [aus L 4-1]

4.7.2.2 Periodische Funktion, stückweise beschreibbar

Stückweise beschreibbare Funktionen werden Modulo T [8] ausgedrückt

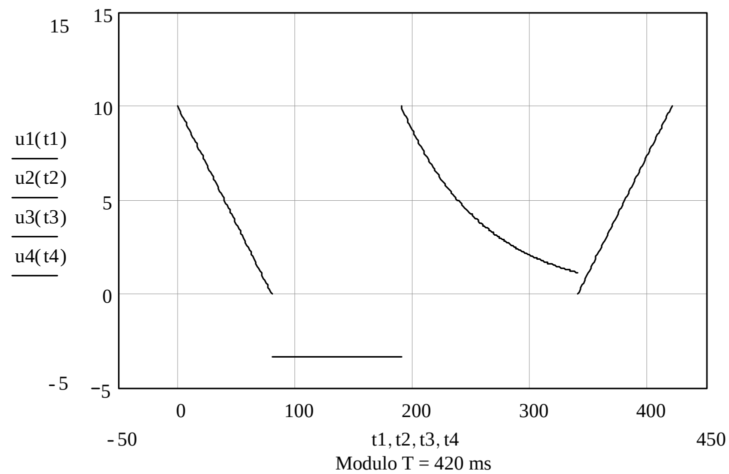


Fig. 4-19 Funktion Modulo T [mit L 4-2]

Die dargestellte Funktion ist gegeben mit

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{lll} U \cdot \left(1 - \frac{21}{4} \cdot \frac{t}{T}\right) & ; & 0 \le t \le \frac{4}{21} \cdot T \\ -\frac{U}{3} & ; & \frac{4}{21} \cdot T \le t \le \frac{19}{42} \cdot T \\ U \cdot e^{-\frac{t - \frac{19}{42} \cdot T}{\frac{T}{6}}} & ; & \frac{19}{42} \cdot T \le t \le \frac{34}{42} \cdot T \\ U \cdot \left(\frac{21}{4} \cdot \frac{t}{T} - \frac{17}{4}\right) & ; & \frac{34}{42} \cdot T \le t \le T \end{array} \right\} \text{Modulo } T$$

8 Lat. modulor; nach dem Takt abgemessen.

Aufgabe: Stellen Sie folgende Funktionen grafisch dar:

a)

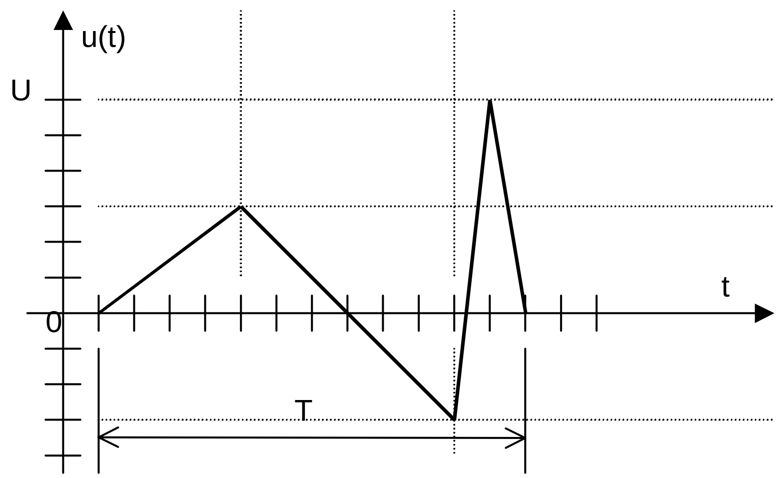
$$i(t) = \begin{cases} I & ; -\infty < t \le 0 \\ 0 & ;\ 0 \le t \le T \\ -I & ;\ T \le t < \infty \end{cases} \qquad \begin{aligned} I &= 5\,mA \\ T &= 1\,s \end{aligned}$$

b)

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{lll} U \cdot \left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right) & ; & 0 \le t \le 50\ ms \\ U \cdot \left(1 - e^{-\frac{5\tau - t}{\tau}}\right) & ; & 50\ ms \le t \le 60\ ms \\ U \cdot \left(0{,}63 + e^{\frac{6\tau - t}{\tau}}\right) & ; & 60\ ms \le t \le 100\ ms \end{array} \right\} \text{Modulo } T = 100\ ms$$

$$U = 15\,V$$
$$\tau = 10\,ms$$

c) Schreiben Sie die skizzierte Funktion Modulo T an:



4.7.2.3 Sinusförmige Signale

Sinusförmige Signale gelten als Sonderfall der periodischen Funktionen, der sehr häufig vorkommt.

$u_1(t) := U \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad u_2(t) := 0.8 \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \qquad u_3(t) := 1.1 \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi)$

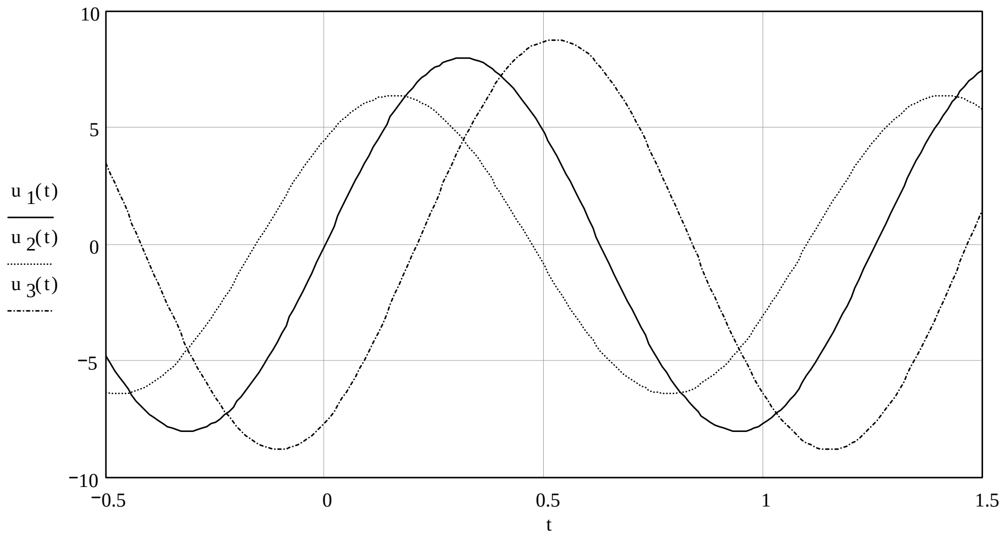


Fig. 4-20 Sinusförmiges Signal [Mit L 4-2]

Die Spannung u_2 eilt der Spannung u_1 um den Winkel φ vor. Die Spannung u_3 eilt der Spannung u_1 um den Winkel ψ nach.

Signale können einem Gleichstrom, einer Gleichspannung überlagert sein:

$u_1(t) := 5 + U \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad u_2(t) := 5 + 0.8 \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \qquad u_3(t) := 5 + 1.1 \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi)$

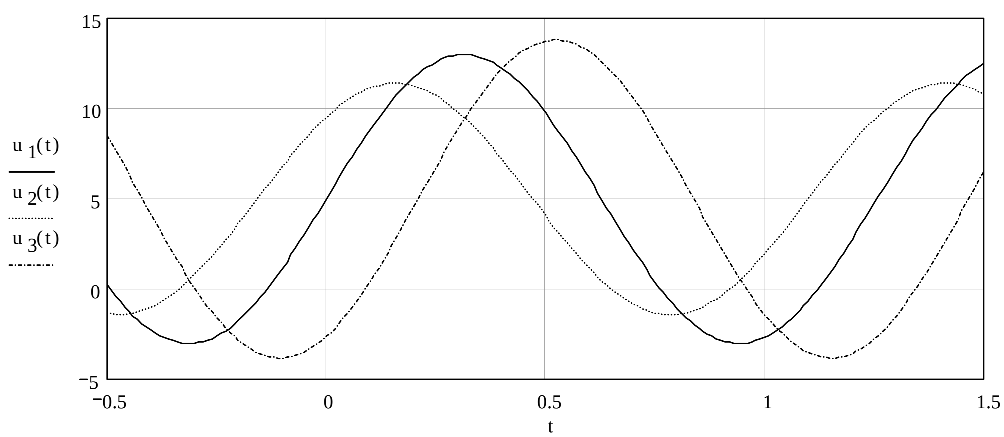


Fig. 4-21 Überlagertes Signal [Mit L 4-2]

4.8 Anpass - Schaltungen

In der Übertragungstechnik werden oft Einheiten mit unterschiedlichen Eigenschaften für die Übertragung von Informationen verwendet.
Häufig besteht der Wunsch, diese Einheiten unter Leistungsanpassung miteinander zu verbinden, was nicht immer unmittelbar möglich ist. Die Ausgangs- und Eingangswiderstände der einzelnen Einheiten sind oft unterschiedlich.

Für das angepasste Zusammenschalten solcher Einheiten eignen sich die π - und T – Netzwerke nach 4.1.

4.8.1 Problemstellung

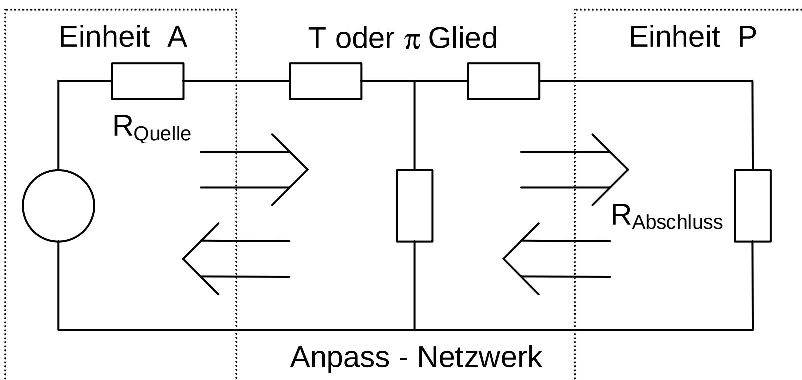


Fig. 4-22 Anpass - Netzwerk

Aktive Einheiten A lassen sich als reale Quellen darstellen, passive Einheiten P als Widerstände.
Um je Leistungsanpassung zu erreichen, werden die Einheiten mit einem Anpass – Netzwerk verbunden.
Für Leistungsanpassung muss die Einheit A nach rechts $R_{Quelle} = R_e$ als Last sehen. Für Leistungsanpassung muss die Einheit P nach links $R_{Abschluss} = R_a$ als Last sehen.

4.8.2 Anpassung mit T - Glied

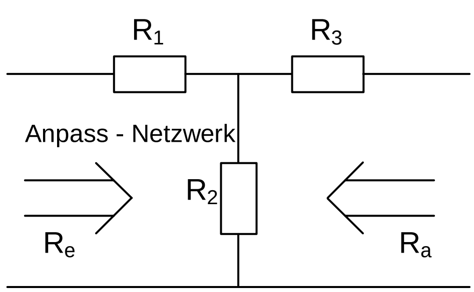


Fig. 4-23 Anpass – Netzwerk mit T - Glied

4.8.2.1 Spannungsbezug

R_e und R_a sind gegeben. Mit $d = U_e/U_a$ und $k = R_a/R_e$ werden:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_a \cdot \frac{d \cdot k \cdot (d-2)+1}{k \cdot \left(d^2 \cdot k - 1\right)} = R_e \cdot \frac{d \cdot k \cdot (d-2)+1}{d^2 \cdot k - 1} \\
R_2 &= R_a \cdot \frac{2 \cdot d}{d^2 \cdot k - 1} = R_e \cdot \frac{2 \cdot d \cdot k}{d^2 \cdot k - 1} \\
R_3 &= R_a \cdot \frac{d \cdot (d \cdot k - 2)+1}{d^2 \cdot k - 1} = R_e \cdot \frac{k \cdot [d \cdot (d \cdot k - 2)+1]}{d^2 \cdot k - 1}
\end{aligned}
\qquad (4\text{-}7)
$$

Das Verhältnis 1/d der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung kann auch in Dezibel (dB), dem Mass für die Spannungsdämpfung, angegeben sein.
Wegen $dB = 20 \cdot \lg(U_a/U_e) = 20 \cdot \lg(1/d) = -20 \cdot \lg(d)$ gilt mit $a = |dB| / 20$, dass $d = 10^a$.

Abhängig von $k = R_a/R_e$ darf d folgende Werte nicht unterschreiten:

Für $k < 1$ oder $R_a < R_e$: $\quad d \geq \frac{1+\sqrt{1-k}}{k}$

Für $k > 1$ oder $R_a > R_e$: $\quad d \geq 1+\sqrt{\frac{k-1}{k}}$

Abhängig von k kann eine minimale Dämpfung nicht unterschritten werden.

4.8.2.2 Leistungsbezug

R_e und R_a sind gegeben. Mit $P_a = U_a^2 / R_a$ und $P_e = U_e^2 / R_e$ wird
$P_e / P_a = N = d^2 k$
Weiter gelten
$10 \cdot \lg(N) = 20 \cdot \lg(d) + 10 \cdot \lg(k)$ und
$20 \cdot \lg(d) = 10 \cdot \lg(N) - 10 \cdot \lg(k)$ (Sonderfall: k=1)

R_e und R_a sind gegeben. Mit $N = P_e/P_a$ und $k = R_a/R_e$ werden:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_e \cdot \frac{N+1}{N-1} - R_2 \\
R_2 &= \frac{2 \cdot \sqrt{N \cdot R_e \cdot R_a}}{N-1} \\
R_3 &= R_a \cdot \frac{N+1}{N-1} - R_2
\end{aligned}
\qquad (4\text{-}8)
$$

Das Verhältnis 1/N der Ausgangsleistung zur Eingangsleistung kann auch in Dezibel (dB), dem Mass für die Leistungsdämpfung, angegeben sein.
Wegen $dB = 10 \cdot \lg(P_a/P_e) = 10 \cdot \lg(1/N) = -10 \cdot \lg(N)$ gilt mit $n = |dB| / 10$, dass $N = 10^n$.

Abhängig von $k = R_a/R_e$ darf d beziehungsweise N folgende Werte nicht unterschreiten:

Für $k < 1$ oder $R_a < R_e$: $\quad d \geq \frac{1+\sqrt{1-k}}{k}$

Für $k > 1$ oder $R_a > R_e$: $\quad d \geq 1+\sqrt{\frac{k-1}{k}}$

Abhängig von k kann eine minimale Dämpfung nicht unterschritten werden.

4.8.3 Anpassung mit π - Glied

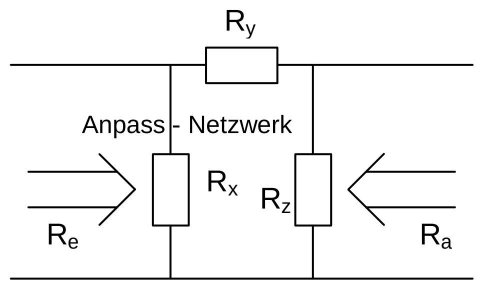


Fig. 4-24 Anpass – Netzwerk mit π - Glied

4.8.3.1 Spannungsbezug

R_e und R_a sind gegeben. Mit $d = U_e/U_a$ und $k = R_a/R_e$ werden:

$$
\begin{aligned}
R_x &= R_a \cdot \frac{d^2 \cdot k - 1}{k \cdot [d \cdot (d \cdot k - 2) + 1]} = R_e \cdot \frac{d^2 \cdot k - 1}{d \cdot (d \cdot k - 2) + 1} \\
R_y &= R_a \cdot \frac{d^2 \cdot k - 1}{2 \cdot d \cdot k} = R_e \cdot \frac{d^2 \cdot k - 1}{2 \cdot d} \\
R_z &= R_a \cdot \frac{d^2 \cdot k - 1}{k \cdot d \cdot (d - 2) + 1} = R_e \cdot \frac{k \cdot (d^2 \cdot k - 1)}{k \cdot d \cdot (d - 2) + 1}
\end{aligned} \tag{4-9}
$$

Das Verhältnis 1/d der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung kann auch in Dezibel (dB), dem Mass für die Spannungsdämpfung, angegeben sein.
Wegen $dB = 20 \cdot \lg(U_a/U_e) = 20 \cdot \lg(1/d) = -20 \cdot \lg(d)$ gilt mit $a = |dB| / 20$, dass $d = 10^a$.

Abhängig von $k = R_a/R_e$ darf d folgende Werte nicht unterschreiten:

Für $k < 1$ oder $R_a < R_e$: $d \geq \frac{1 + \sqrt{1 - k}}{k}$

Für $k > 1$ oder $R_a > R_e$: $d \geq 1 + \sqrt{\frac{k - 1}{k}}$

Abhängig von k kann eine minimale Dämpfung nicht unterschritten werden.

4.8.3.2 Leistungsbezug

R_e und R_a sind gegeben. Mit $P_a = U_a^2 / R_a$ und $P_e = U_e^2 / R_e$ wird
$P_e / P_a = N = d^2 k$
Weiter gelten
$10 \cdot \lg(N) = 20 \cdot \lg(d) + 10 \cdot \lg(k)$ und
$20 \cdot \lg(d) = 10 \cdot \lg(N) - 10 \cdot \lg(k)$ (Sonderfall: k=1)

R_e und R_a sind gegeben. Mit $N = P_e/P_a$ und $k = R_a/R_e$, sowie $G = 1/R$ werden:

$$G_x = G_e \cdot \frac{N+1}{N-1} - G_y$$
$$G_y = \frac{2 \cdot \sqrt{N \cdot G_e \cdot G_a}}{N-1} \qquad (4\text{-}10)$$
$$G_z = G_a \cdot \frac{N+1}{N-1} - G_y$$

Das Verhältnis 1/N der Ausgangsleistung zur Eingangsleistung kann auch in Dezibel (dB), dem Mass für die Leistungsdämpfung, angegeben sein.
Wegen dB = $10 \cdot \lg(P_a/P_e) = 10 \cdot \lg(1/N) = -10 \cdot \lg(N)$ gilt mit n = |dB| / 10, dass $N = 10^n$.

Abhängig von $k = R_a/R_e$ darf d beziehungsweise N folgende Werte nicht unterschreiten:

Für k < 1 oder $R_a < R_e$: $\quad d \geq \frac{1+\sqrt{1-k}}{k}$

Für k > 1 oder $R_a > R_e$: $\quad d \geq 1+\sqrt{\frac{k-1}{k}}$

Abhängig von k kann eine minimale Dämpfung nicht unterschritten werden.

4.8.4 Anpassungs – Netzwerk. Anwendung

Messungen zum Vergleich verschiedener Antennen:

Es sollen drei Antennen, nämlich

eine 5 Element Yagi mit 50 Ohm Fusspunktwiderstand,
eine 2 Element Cubical - Quad mit 40 Ohm Fusspunktwiderstand und
ein 3 Element Faltdipol mit 75 Ohm Fusspunktwiderstand

in ihren Empfangseigenschaften verglichen werden zu einem einfachen Dipol mit 60 Ohm Fusspunktwiderstand.

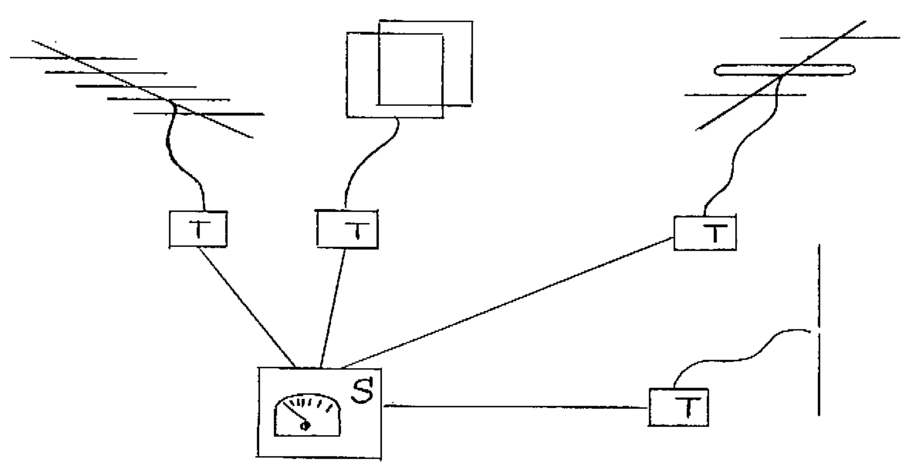


Fig. 4-25 Anpassungs – Netzwerk. Anwendung

Für die Messungen im Feld steht ein Messgerät zur Verfügung, das einen Eingangswiderstand von 50 Ohm aufweist und in der Leistung geeicht ist (Ablesung in Watt, beziehungsweise S für Signal – Strength).

Es sollen geeignete Anpass – Netzwerke berechnet werden welche es erlauben, die abgelesenen Werte unmittelbar miteinander zu vergleichen. Es sollen keine Umrechnungen mit den abgelesenen Werten nötig sein.

Lösung mit π Netzwerk

Die verschiedenen Antennen dürfen als Quellen gegenüber dem Messgerät aufgefasst werden.
Damit die Messresultate unmittelbar verglichen werden können, sollen alle Anpassungen um den gleichen Wert dämpfen, das heisst es soll nicht auf je minimale Dämpfung geachtet werden.
Aus den verschiedenen Faktoren k (Antennen gegenüber Messgerät) lässt sich ermitteln, dass N > 3,732 sein muss.
Es ist geeignet N = 4 zu wählen, was einer Leistungsdämpfung von 6 dB entspricht.

Anpassung Yagi gegenüber Messgerät:

$R_y = 37.5 \cdot \Omega \qquad R_x = 150 \cdot \Omega \qquad R_z = 150 \cdot \Omega$

Anpassung Cubical Quad gegenüber Messgerät:

$R_y = 33.541 \cdot \Omega \qquad R_x = 84.371 \cdot \Omega \qquad R_z = 284.164 \cdot \Omega$

Anpassung Faltdipol gegenüber Messgerät:

$R_y = 45.928 \cdot \Omega \qquad R_x = 2.227 \cdot k\Omega \qquad R_z = 86.505 \cdot \Omega$

$N := 4 \qquad R_a := 50 \cdot \Omega \qquad R_e := 75 \cdot \Omega \qquad G_a := \frac{1}{R_a} \qquad G_e := \frac{1}{R_e}$

$$G_y := \frac{2 \cdot \sqrt{N \cdot G_e \cdot G_a}}{N-1} \qquad G_x := G_e \cdot \frac{N+1}{N-1} - G_y \qquad G_z := G_a \cdot \frac{N+1}{N-1} - G_y$$

$$R_y := \frac{1}{G_y} \qquad R_x := \frac{1}{G_x} \qquad R_z := \frac{1}{G_z}$$

$R_y = 45.928 \cdot \Omega \qquad R_x = 2.227 \cdot k\Omega \qquad R_z = 86.505 \cdot \Omega$

Aufgabe:

Suchen Sie eine Lösung mit T – Netzwerken.

4.9 Verzeichnisse

4.9.1 Literaturverzeichnis

L 4-1 Frohne Heinrich, Löcherer Karl-Heinz und Müller Hans, Grundlagen der Elektrotechnik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1996, ISBN 3-519-46400-4.

L 4-2 MATHCAD® 2000. Mathematiksoftware, die sich für numerische Rechnungen und Laborauswertungen eignet.

4.9.2 Figurenverzeichnis

4.9.3 Stichwortverzeichnis