

Elektrotechnik Grundlagen

Kapitel 6

Kapazität C und Induktivität L

2004
Kurt Steudler

(/Modul_ET1_Kap_06.doc)

Inhaltsverzeichnis

6	Kapazität C und Induktivität L	3
6.1	Zusammenhang zwischen Strom und Spannung	3
6.2	Das Verhalten von C und L auf nichtsinusförmige Signale	4
6.2.1	Die Sprungantwort der Kapazität C	4
6.2.2	Die Sprungantwort der Induktivität L	5
6.2.3	Folgerungen und Sätze	6
6.2.4	Der Stromkreis mit R und C	6
6.2.5	Der Stromkreis mit R und L	9
6.2.6	Aufgaben zum Stromkreis R, L und C	12
6.2.7	Integrier- und Differenzierglieder	12
6.3	Das Verhalten von C und L auf sinusförmige Signale	15
6.3.1	Sinusförmiges Signal	15
6.3.2	Zeigerdarstellung für sinusförmiges Signal	16
6.3.3	Das Verhalten von C auf sinusförmige Signale	18
6.3.4	Das Verhalten von L auf sinusförmige Signale	19
6.3.5	Zusammenstellung der Impedanzen	20
6.4	Das Bauelement C	20
6.4.1	Bauformen des Kondensators	20
6.4.2	Ersatzschaltbild für C	21
6.5	Das Bauelement L	22
6.5.1	Bauformen der Induktivität	22
6.5.2	Ersatzschaltbild für L	23
6.6	Anhang	23
6.6.1	Blasenkammer	23
6.6.2	NMR	25
6.7	Verzeichnisse	26
6.7.1	Literaturverzeichnis	26
6.7.2	Figurenverzeichnis	26
6.7.3	Tabellenverzeichnis	27
6.7.4	Stichwortverzeichnis	27

6 Kapazität C und Induktivität L

Aus der Gleichstromtechnik sind folgende Bauelemente bekannt: Widerstand R, ideale Spannungsquelle und ideale Stromquelle.

Zusätzlich führen wir die Bauelemente Kapazität (Kondensator) C und Induktivität L ein.

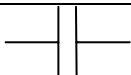

	Kapazität Kondensator	Induktivität (Spule)
Symbol		
Bezeichnung	C	L
Dimension	F ¹ Farad	H ² Henry

Tabelle 6-1 Symbol, Bezeichnung und Dimension von L und C

6.1 Zusammenhang zwischen Strom und Spannung

Für die Bauelemente C und L gilt allgemein^{3,4}

Kapazität	Induktivität
$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$	$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u(t) \cdot dt$

(6-1)

Tabelle 6-2 Formelsatz zu L und C

Wir befassen uns mit der Anwendung dieser grundlegenden Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom.⁵

Die beiden Elemente C und L sind **dual** in ihrem Verhalten. Diese Dualität drückt sich in den Symmetrien im Formelsatz (5-1) aus.

Aus den Beziehungen zwischen Spannung und Strom ergeben sich die Dimensionen zu

¹ Michael FARADAY, 22.9.1791-25.8.1867, brit. Physiker und Chemiker, entdeckt das Benzol, die Gesetze der elektromagn. Induktion, den Faraday'schen Käfig, die Elektrolyse, den Diamagnetismus und so weiter.

² Joseph HENRY, 17.12.1797-13.5.1878, amerikanischer Physiker. Entscheidender Beitrag zur Morsetelegraphie, entdeckt die Selbstinduktion (1830).

³ Eine Herleitung erfolgt im Kapitel 8 Elektrisches Feld und Magnetisches Feld.

⁴ Die Spannung $u(t)$ und der Strom $i(t)$ sind zeitabhängige Größen.

⁵ Integro – differenzielle Beziehungen.

$$[C] = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{Cb}{V} = F \quad \text{Farad} \quad \text{und}$$

$$[L] = \frac{V \cdot s}{A} = H \quad \text{Henry} \quad (6-2)$$

6.2 Das Verhalten von C und L auf nichtsinusförmige Signale

6.2.1 Die Sprungantwort der Kapazität C

Es sei

$$i(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \leq t_0 \\ I & ; t_0 \leq t < \infty \end{cases}$$

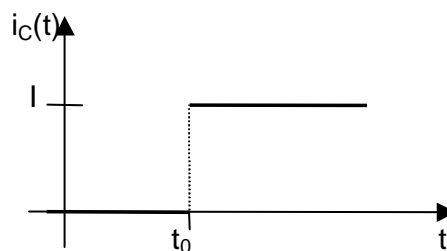


Fig. 6-1 Stromsprung an C

Wie verläuft die Spannung an der Kapazität C ?

Mit $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) \cdot dt$ wird

a) im Zeitbereich $-\infty < t \leq t_0$: $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int 0 \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot A + K_1$ ⁶

b) im Zeitbereich $t_0 \leq t < \infty$: $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int I \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot t + K_2$ (6-3)

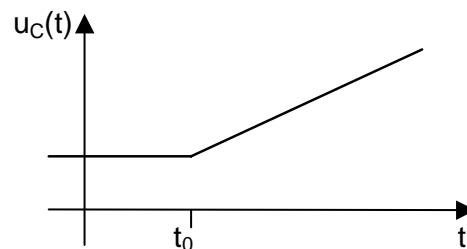


Fig. 6-2 Sprungantwort von C

Die Sprungantwort kann mit der nachfolgenden Schaltung bewirkt werden. Dabei wird der Schalter S zur Zeit t_0 von der Stellung 1 in die Stellung 2 gebracht.

⁶ Die Integrationskonstante K ergibt sich aus den Randbedingungen.

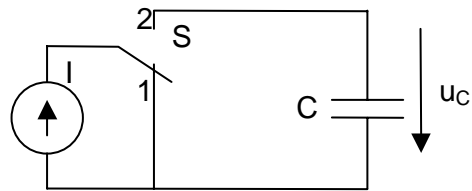


Fig. 6-3 Schaltung zur Sprungantwort des Kondensators C

6.2.2 Die Sprungantwort der Induktivität L

Es sei
$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \leq t_0 \\ U & ; t_0 \leq t < \infty \end{cases}$$

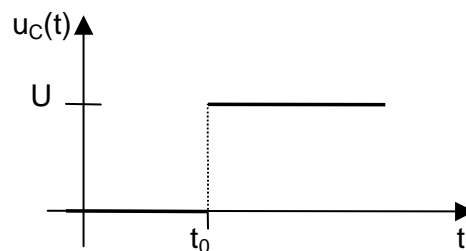


Fig. 6-4 Spannungssprung an L

Wie verläuft der Strom in der Induktivität L ?

Mit $i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) \cdot dt$ wird

c) im Zeitbereich $-\infty < t \leq t_0$:
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int 0 \cdot dt = \frac{1}{L} \cdot A + K_1^7$$

d) im Zeitbereich $t_0 \leq t < \infty$:
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int U \cdot dt = \frac{U}{L} \cdot t + K_2 \quad (6-4)$$

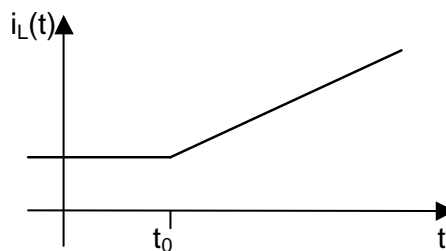


Fig. 6-5 Sprungantwort von L

Die Sprungantwort kann mit der nachfolgenden Schaltung bewirkt werden. Dabei wird der Schalter S zur Zeit t_0 von der Stellung 2 in die Stellung 1 gebracht.

⁷ Die Integrationskonstante K ergibt sich aus den Randbedingungen.

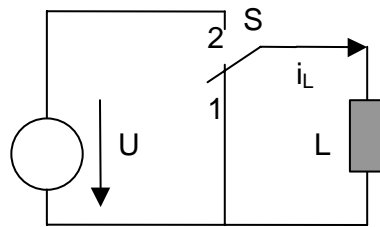


Fig. 6-6 Schaltung zur Sprungantwort der Induktivität L

6.2.3 Folgerungen und Sätze

Die Herleitung nach 6.2.1 besagt, dass – trotz einer endlichen, sprunghaften Änderung des Stromes – die Spannung u_C am Kondensator im ersten Moment unverändert bleibt und dann langsam ansteigt.

SATZ

An einem Kondensator kann sich die Spannung nicht sprunghaft ändern. Bei einer plötzlichen Stromänderung verhält sich der Kondensator im ersten Moment wie eine Spannungsquelle.

Die Herleitung nach 6.2.2 besagt, dass – trotz einer endlichen, sprunghaften Änderung der Spannung – der Strom i_L durch die Induktivität im ersten Moment unverändert bleibt und dann langsam ansteigt.

SATZ

In einer Induktivität kann sich der Strom nicht sprunghaft ändern. Bei einer plötzlichen Spannungsänderung verhält sich die Induktivität im ersten Moment wie eine Stromquelle.

6.2.4 Der Stromkreis mit R und C

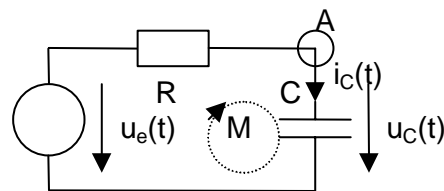


Fig. 6-7 Stromkreis mit R und C

6.2.4.1 Verlauf von $u_C(t)$

Es sei

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \leq t_0 \\ U & ; t_0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Im Knoten A gilt:

$$\frac{u_e(t) - u_C(t)}{R} = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Daraus wird allgemein

$$\int \frac{1}{u_e(t) - u_C(t)} \cdot du_C(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int 1 \cdot dt$$

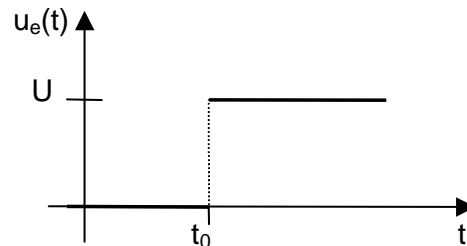


Fig. 6-8 Spannungssprung auf R und C

Für den Zeitbereich $-\infty < t \leq t_0$ wird mit der Randbedingung $u_C(t_0) = 0$ die Spannung am Kondensator $u_C(t) = 0$.

Für den Zeitbereich $t_0 \leq t < \infty$ wird mit $u_e(t) = U$:

$$\int \frac{1}{U - u_C(t)} \cdot du_C(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int 1 \cdot dt$$

Daraus ergibt sich mit der Abkürzung $\tau = R \cdot C$ die Lösung für $u_C(t)$ zu:

$$u_C(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) \quad (6-5)$$

Die Abkürzung $\tau = R \cdot C$ nennen wir **Zeitkonstante**. Dimension $[\tau] = s$.

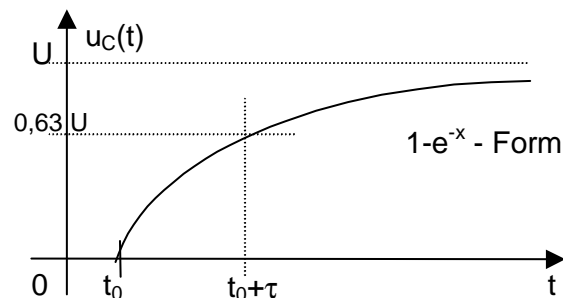


Fig. 6-9 Ladekurve an C

Die Funktion $u_C(t)$ erreicht den Endwert U nach unendlich langer Zeit. Die Abweichung zum Endwert U ist nach $4 \tau < 2\%$ und nach $5 \tau < 7\%$. Für praktische Anwendungen gehen wir davon aus, dass der Endwert nach der Zeit 5τ erreicht ist.

6.2.4.2 Verlauf von $i_C(t)$

Entlang der Masche M gilt

$$i_C(t) \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) \cdot dt - u_e(t) = 0$$

Differenziert nach der Zeit wird

$$\frac{di_C(t)}{dt} \cdot R + \frac{1}{C} \cdot i_C(t) = \frac{du_e(t)}{dt}$$

und somit wegen $\frac{du_e(t)}{dt} = 0$ ⁸

$$\int \frac{di_C(t)}{i_C(t)} = -\frac{1}{RC} \cdot \int 1 \cdot dt \quad (6-6)$$

Für den Zeitbereich $-\infty < t \leq t_0$ wird mit der Randbedingung $i_C(t_0) = 0$ der Strom durch den Kondensator $i_C(t) = 0$.

Für den Zeitbereich $t_0 \leq t < \infty$ wird

$$\ln\{i_C(t)\} = -\frac{t}{\tau} + K_1 \quad \Rightarrow \quad i_C(t) = K_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

und wegen $u_C(t_0) = 0 \Rightarrow i_C(t_0) = \frac{U}{R} = I$ wird $K_2 = I \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}}$ und damit

$$i_C(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = I \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (6-7)$$

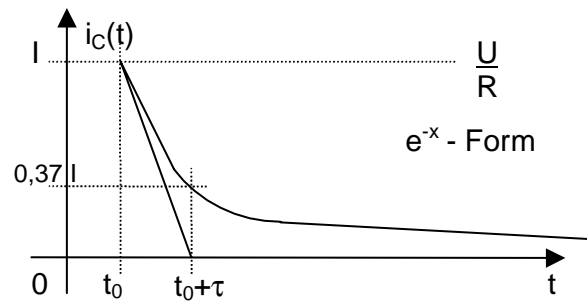


Fig. 6-10 Stromverhalten in C

⁸ $u_e(t)$ ist vor und nach dem Sprung konstant, das heisst zeitunabhängig.

6.2.4.3 Realisierung mit Schalter

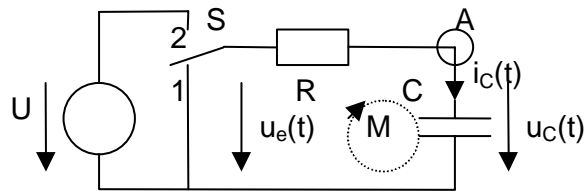


Fig. 6-11 Realisierung mit Schalter auf R und C

Der Schalter S wird zur Zeit t_0 von der Stellung 1 in die Stellung 2 gebracht.

Wird der Schalter zur Zeit t_1 von der Stellung 2 in die Stellung 1 zurückgelegt, ergeben sich für das Verhalten der Spannung die e^{-x} – Form und für das Verhalten des Stromes die $-e^{-x}$ – Form. Mit $t_1 - t_0 > 5\tau$ werden

$$u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad (6-8)$$

$$i_C(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} = -I \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad (6-9)$$

6.2.5 Der Stromkreis mit R und L

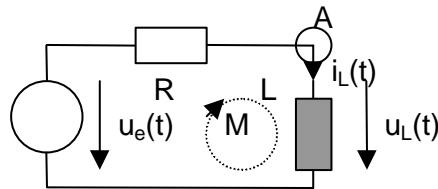


Fig. 6-12 Stromkreis mit R und L

6.2.5.1 Verlauf von $u_L(t)$

Es sei

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \leq t_0 \\ U & ; t_0 \leq t < \infty \end{cases}$$

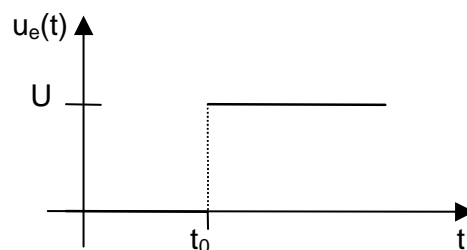


Fig. 6-13 Spannungssprung auf R und L

Im Knoten A gilt:

$$\frac{u_e(t) - u_L(t)}{R} = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) \cdot dt$$

Differenziert nach der Zeit wird

$$\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{du_L(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot u_L(t), \quad \text{worin } \tau = \frac{L}{R}$$

Die Abkürzung $\tau = L/R$ nennen wir **Zeitkonstante**. Dimension $[\tau] = s$.

Da $u_e(t)$ entweder 0 oder U, das heisst in der Zeit konstant ist, wird $\frac{du_e(t)}{dt} = 0$ und es gilt allgemein

$$\int \frac{du_L(t)}{u_L(t)} = -\frac{1}{\tau} \cdot \int 1 \cdot dt, \quad \text{worin } \tau = \frac{L}{R} \quad (6-10)$$

Für den Zeitbereich $-\infty < t \leq t_0$ wird mit der Randbedingung $u_L(t_0) = 0$ die Spannung an der Induktivität $u_L(t) = 0$.

Für den Zeitbereich $t_0 \leq t < \infty$ wird mit $u_e(t) = U$:

$$\ln\{u_L(t)\} = -\frac{1}{\tau} \cdot t + K_1$$

$$u_L(t) = K_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Mit der Randbedingung $u_e(t_0) = U$ wird $K_2 = U \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}}$ und daraus

$$u_L(t) = U \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (6-11)$$

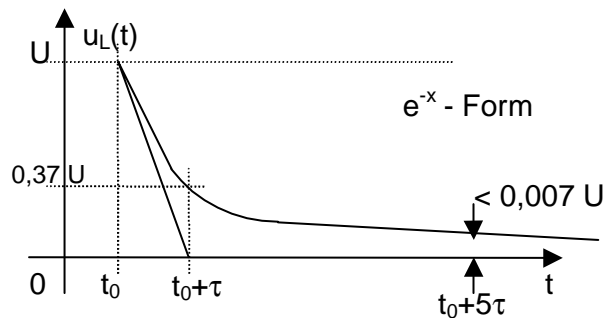


Fig. 6-14 Spannungsverhalten an L

Die Funktion $u_L(t)$ erreicht den Endwert 0 nach unendlich langer Zeit. Die Abweichung zum Endwert 0 ist nach $4\tau < 2\%$ und nach $5\tau < 7\%$. Für praktische Anwendungen gehen wir davon aus, dass der Endwert nach der Zeit 5τ erreicht ist.

6.2.5.2 Verlauf von $i_L(t)$

Entlang der Masche M gilt

$$R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} - u_e(t) = 0$$

Daraus wird allgemein

$$R \cdot \int \frac{1}{u_e(t) - R \cdot i_L(t)} \cdot di_L(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int 1 \cdot dt$$

Für den Zeitbereich $-\infty < t \leq t_0$ wird mit der Randbedingung $i_L(t_0) = 0$ der Strom durch die Induktivität $i_L(t) = 0$.

Für den Zeitbereich $t_0 \leq t < \infty$ wird mit $u_e(t) = U$:

$$R \cdot \int \frac{1}{U - R \cdot i_L(t)} \cdot du_C(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int 1 \cdot dt$$

Daraus ergibt sich mit der Abkürzung $\tau = L/R$ die Lösung für $i_C(t)$ zu:

$$i_C(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) = I \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) \quad (6-12)$$

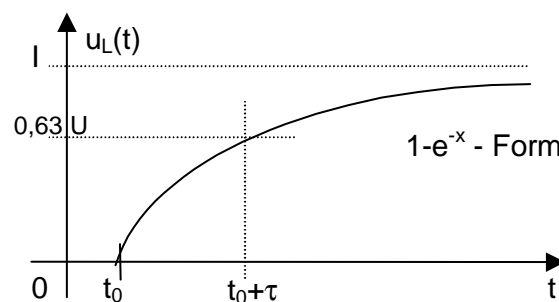


Fig. 6-15 Stromverhalten in L

6.2.5.3 Realisierung mit Schalter

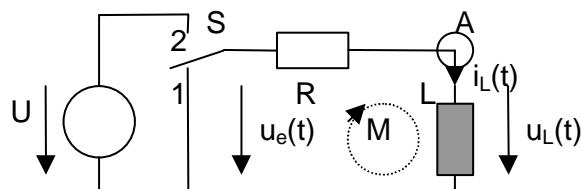


Fig. 6-16 Realisierung mit Schalter auf R und L

Der Schalter S wird zur Zeit t_0 von der Stellung 1 in die Stellung 2 gebracht.

Wird der Schalter zur Zeit t_1 von der Stellung 2 in die Stellung 1 zurückgelegt, ergeben sich für das Verhalten der Spannung die $-e^{-x}$ – Form und für das Verhalten des Stromes die e^{-x} – Form. Mit $t_1 - t_0 > 5 \tau$ werden

$$u_L(t) = -U \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad (6-13)$$

$$i_C(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} = I \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \quad (6-14)$$

6.2.6 Aufgaben zum Stromkreis R, L und C

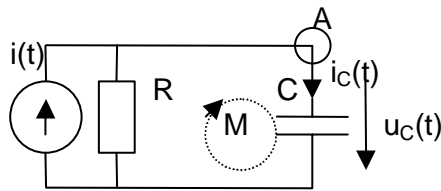


Fig. 6-17 Quelle wirkend auf C

$$\text{Es sei } i(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \leq 0 \\ I & ; 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Wie verlaufen $u_C(t)$ und $i_C(t)$? Zuerst $i_C(t)$ herleiten.

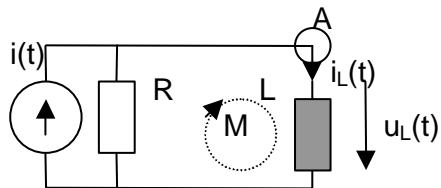


Fig. 6-18 Quelle wirkend auf L

$$\text{Es sei } i(t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < t \leq 0 \\ I & ; 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Wie verlaufen $u_L(t)$ und $i_L(t)$? Zuerst $i_L(t)$ herleiten.

6.2.7 Integrier- und Differenzglieder

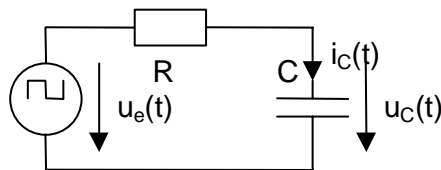


Fig. 6-19 Rechtecksignal wirkend auf R und C

Es sei

$$u_e(t) = \begin{cases} U & ; 0 < t \leq \frac{T}{n} \\ 0 & ; \frac{T}{n} \leq t < T \end{cases} \text{ Modulo } T$$

Wie verläuft $u_C(t)$?

An C stellt sich folgender Spannungsverlauf ein:⁹

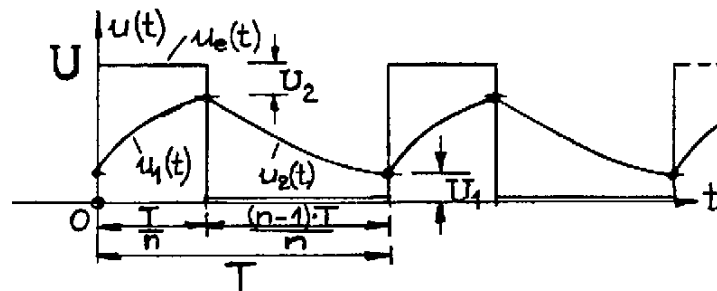


Fig. 6-20 Spannung an C bei Rechteckspeisung

Wie gross werden U_1 und U_2 ?

⁹ Das Verhältnis von T zu T/n nennen wir **Tastverhältnis** V . (T/n zu T stellt den Tastgrad g dar).

Es gelten die Funktionen

$$u_1(t) = (U - U_1) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_1 \quad ; \quad \tau = RC$$

$$u_2(t) = (U - U_2) \cdot e^{-\frac{t - \frac{T}{n}}{\tau}}$$

Daraus ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen mit den Unbekannten U_1 und U_2 :

$$u_1\left(\frac{T}{n}\right) = (U - U_1) \cdot (1 - e^{-\frac{T}{n \cdot \tau}}) + U_1 = U - U_2 = u_2\left(\frac{T}{n}\right)$$

$$u_2(T) = (U - U_2) \cdot e^{-\frac{(n-1) \cdot T}{n \cdot \tau}} = U_1 = u_1(T)$$

mit den Lösungen

$$\frac{U_1}{U} = 1 - \frac{1 - e^{-\frac{(1-\frac{1}{n}) \cdot T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (6-15)$$

$$\frac{U_2}{U} = 1 - \frac{1 - e^{-\frac{T}{n \cdot \tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

Für $\tau \gg \frac{n-1}{n} \cdot T$ wird $u_C(t)$ nahezu eine Dreiecksspannung. Die Eingangsspannung wird integriert.

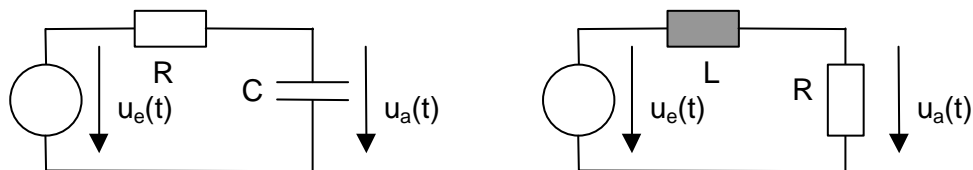


Fig. 6-21 Integrierglieder

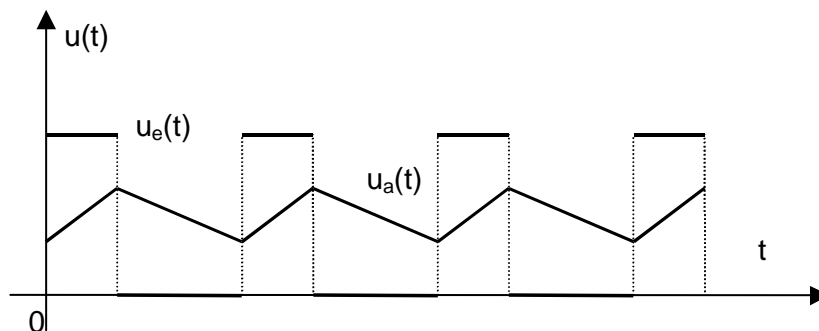


Fig. 6-22 Integration

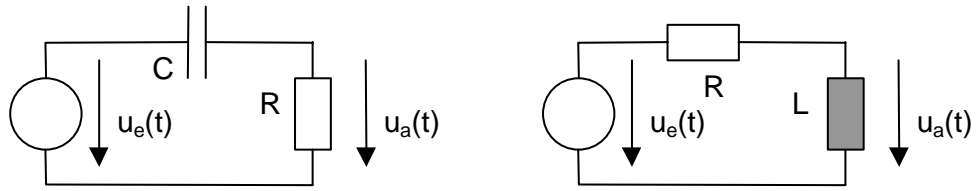


Fig. 6-23 Differenzierglieder

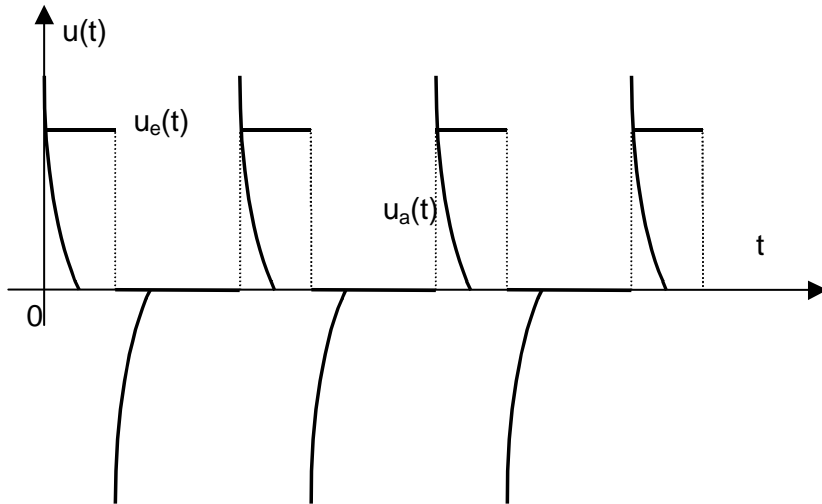


Fig. 6-24 Reale Differenziation

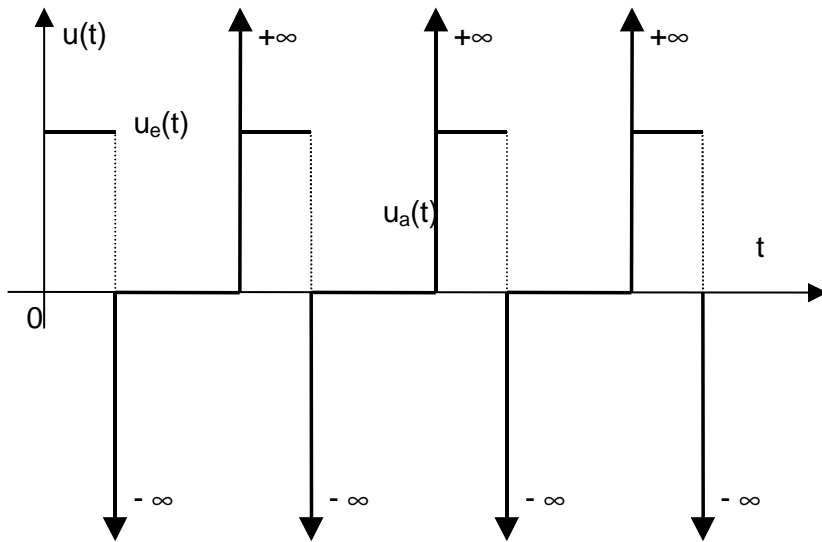


Fig. 6-25 Ideale Differenziation

6.3 Das Verhalten von C und L auf sinusförmige Signale

Für die folgenden Betrachtungen sind Quellen vorausgesetzt, die sinusförmiges Signal generieren.¹⁰



Fig. 6-26 Ideale Quellen für sinusförmiges Signal

6.3.1 Sinusförmiges Signal

Das sinusförmige Signal wurde bereits im Kapitel 4 eingeführt.

$$u_1(t) := U \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad u_2(t) := 0.8 \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \quad u_3(t) := 1.1 \cdot U \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi)$$

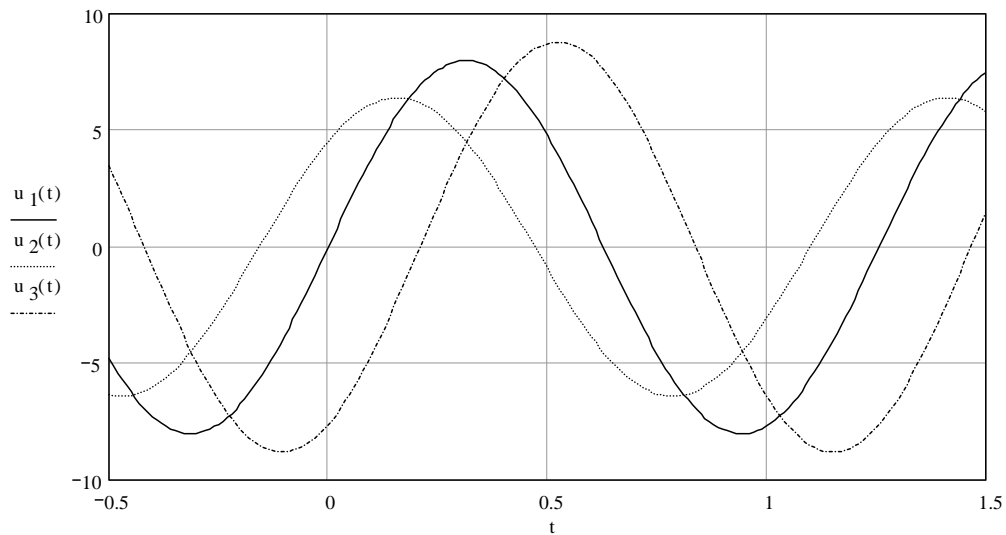


Fig. 6-27 Sinusförmiges Signal [Mit L 6-4]

In der Wechselstromtechnik ist es üblich, für sinusförmiges Signal die Zeigerdarstellung anzuwenden. Dabei sind Zeiger komplexe Größen in der GAUSS' schen Zahlenebene.¹¹

¹⁰ Als Symbole für zeitabhängige Signale werden kleine arabische Buchstaben gesetzt

¹¹ Karl Friedrich GAUSS, Mathematiker und Astronom, 30.4.1777 - 23.2.1855, Prof. und Leiter der Sternwarte Göttingen. 1801: "Disquisitiones arithmeticae". Erster Telegraph mit WEBER. Gauss'sches Masssystem (absolutes System, cgs).

6.3.2 Zeigerdarstellung für sinusförmiges Signal

Wir betrachten einen Zeiger A , der mit $\alpha(t) = \omega \cdot t$ rotiert:

$$a(t) = A \cdot e^{j\omega t} \quad (6-16)$$

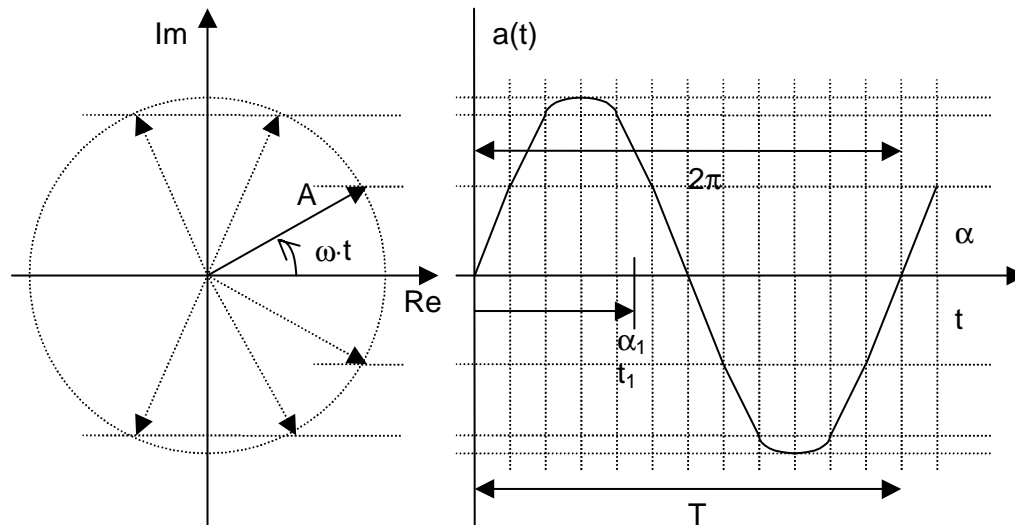


Fig. 6-28 Zeiger- und Zeitdarstellung

Der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω ¹² rotierende Zeiger A kann mit seinem Imaginärteil oder seinem Realteil auf eine Zeitachse projiziert werden. Diese Projektion zeigt ein sinusförmiges Signal. Zwischen Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Zeit besteht an jeder Stelle ein fester Zusammenhang

$$\frac{\alpha_1}{t_1} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \Rightarrow \alpha_1 = t_1 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} = \omega \cdot t_1$$

und es wird

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (6-17)$$

Darin bedeuten

T Periodendauer
 f Frequenz
 ω **Kreisfrequenz**

$[T] = \text{s}$
 $[f] = \text{Hz} (= \text{s}^{-1})$ ^{13, 14}
 $[\omega] = \text{s}^{-1}$

Das sinusförmige Signal $a(t)$ lässt sich mit einem rotierenden Zeiger A vollständig beschreiben und es gelten die Regeln der Rechnung mit komplexen Zahlen.

¹² Winkelgeschwindigkeit = $d\alpha(t)/dt = \omega$. Winkelbeschleunigung = $d^2\alpha(t)/dt^2 = 0$.

¹³ Die Frequenz wird in Hertz angegeben, die Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz in s^{-1} .

¹⁴ Benannt nach Heinrich HERTZ, 22.2.1857 - 1.1.1894, der 1886 die elektromagnetischen Wellen entdeckte. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe und der Universität Bonn.

Die Zeigerdarstellung $a(t) = A \cdot e^{j\omega t}$ enthält alle Informationen der Darstellung entlang einer Zeitachse t .

Die Zeigerdarstellung als symbolische Darstellung sinusförmiger Signale ist mathematisch einfach zu handhaben und benötigt als Angaben nur Zeigerlänge und Winkel.

Spannung, Strom und Leistung lassen sich im Zeigerbereich einfach darstellen

	Zeigerbereich	Zeitbereich
Spannung	$u(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$	$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
	$\hat{u} \cdot e^{j\varphi}$ wird Festzeiger genannt $e^{j\omega t}$ heisst Drehfaktor	
Strom	$i(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = \hat{i} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t}$	$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \psi)$
	$\hat{i} \cdot e^{j\psi}$ wird Festzeiger genannt $e^{j\omega t}$ heisst Drehfaktor	

Tabelle 6-3 Zeigerdarstellung für Spannung und Strom

In vielen Anwendungen wird nur mit dem Festzeiger gerechnet.
Für die Zeigerlänge \hat{u} , \hat{i} wird oft auch U , I geschrieben.

Für Widerstände R gilt auch bei sinusförmigem Signal das OHM'sche Gesetz

$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}}{\hat{i} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = R \quad \text{und} \quad \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = G \quad (6-18)$$

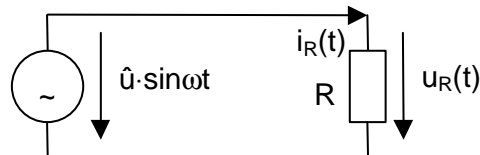


Fig. 6-29 R und sinusförmiges Signal

Für die Bauelemente C und L gelten die Zusammenhänge nach Formelsatz (5 – 1).

6.3.3 Das Verhalten von C auf sinusförmige Signale

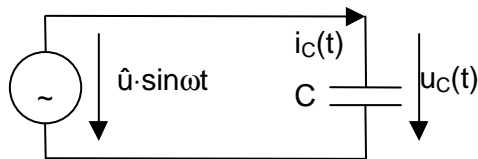


Fig. 6-30 C und sinusförmiges Signal

Mit $u_C = \hat{u} \cdot e^{j\omega t}$ und $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot \hat{u} \cdot \frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot e^{j\omega t}$ wird

$$Z_C = \frac{u_C(t)}{i_C(t)} = \frac{1}{j \cdot \omega C} = j \cdot X_C \quad (6-19)$$

Das Verhältnis Z_C zwischen Spannung und Strom wird imaginär. Z_C nennen wir Impedanz der Kapazität C. Der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom wird

$$\text{mit } \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ zu } \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Die Impedanz des Kondensators – auch Kapazität genannt - ist abhängig von der Kreisfrequenz ω und damit von der Frequenz f .



Fig. 6-31 Impedanzverhalten von C

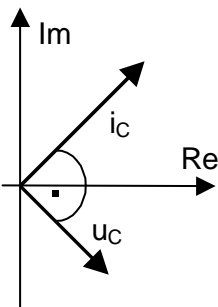


Fig. 6-32 Spannungs- und Stromzeiger an C

Zwischen der Spannung u_C am Kondensator C und dem Strom i_C durch C besteht der Phasenwinkel $\varphi = 90^\circ$. Der Strom und die Spannung sind als Festzeiger eingetragen. Der Strom durch C eilt der Spannung an C vor.

6.3.4 Das Verhalten von L auf sinusförmige Signale

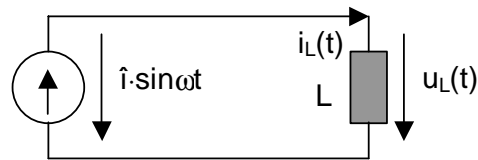


Fig. 6-33 L und sinusförmiges Signal

Mit $i_L = \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$ und $u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \hat{i} \cdot \frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega \cdot L \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t}$ wird

$$Z_L = \frac{u_L(t)}{i_L(t)} = j \cdot \omega L = j \cdot X_L \quad (6-20)$$

Das Verhältnis Z_L zwischen Spannung und Strom wird imaginär. Z_L nennen wir Impedanz der Induktivität L. Der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom wird mit $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Die Impedanz der Induktivität – auch Induktanz genannt - ist abhängig von der Kreisfrequenz ω und damit von der Frequenz f .



Fig. 6-34 Impedanzverhalten von L

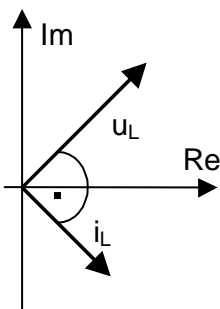


Fig. 6-35 Spannungs- und Stromzeiger an L

Zwischen der Spannung u_L an der Induktivität L und dem Strom i_L durch L besteht der Phasenwinkel $\varphi = -90^\circ$. Der Strom und die Spannung sind als Festzeiger eingetragen. Der Strom durch L eilt der Spannung an L nach.

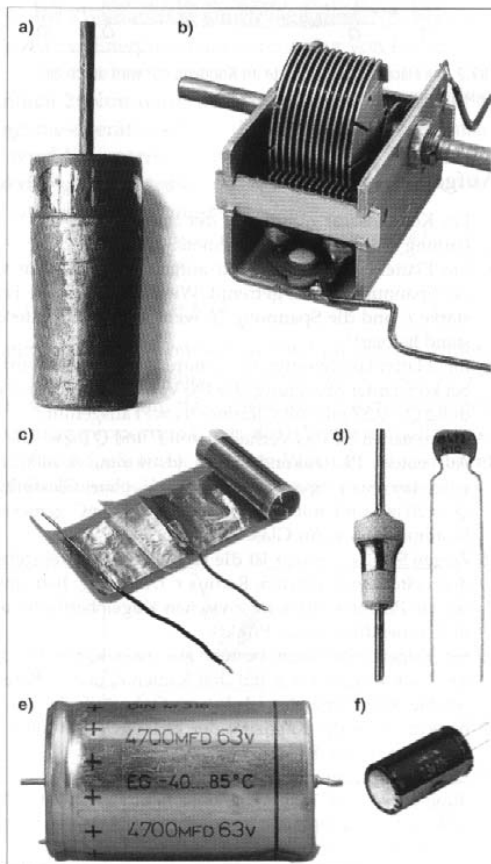
6.3.5 Zusammenstellung der Impedanzen

	Verbraucher R	Speicherelement L	Speicherelement C
$\frac{u}{i}$	Widerstand R	$j \cdot \omega L$	$\frac{1}{j \cdot \omega C}$
$\frac{i}{u}$	Leitwert G	$\frac{1}{j \cdot \omega L}$	$j \cdot \omega C$

Tabelle 6-4 Zusammenstellung Widerstand und Impedanz

6.4 Das Bauelement C

6.4.1 Bauformen des Kondensators



- Leidener Flasche: Die 1745 von Ewald Jürgen von KLEIST und 1746 von MUSSCHENBROEK erfundene Leidener oder Kleist'sche Flasche ist die älteste Form des Kondensators. Ein zylindrisches Glasgefäß ist innen und aussen mit einer Metallfolie beklebt.
- Drehkondensatoren: Ein beweglicher Plattensatz (Rotor) kann in einen feststehenden Plattensatz (Stator) hineingedreht werden. Der Rotor ist mit der Masse verbunden, der Stator dazu isoliert aufgebaut. 10pF bis 1000pF.
- Blockkondensator: Aluminiumstreifen und Kunststoffolie werden geschichtet und gewickelt. Bei Metallfilmkondensatoren wird die Metallschicht auf die Kunststoffolie aufgedampft.
- Keramikkondensatoren: Das Dielektrikum ist eine keramische Masse, die mit Metallbelägen aus Silber oder Nickel versehen ist.
- Elektrolytkondensatoren bestehen aus einer Aluminiumfolie als Anode (Pluspol), einer darauf elektrolytisch aufgetragenen Oxydschicht als Dielektrikum und einem Elektrolyten als Kathode (Minuspol).
- Superkondensatoren (Gold Caps) mit Aktivkohle als Träger des Elektrolyten. Sehr hohe Kapazität (einige 1000 F). Kann Akkumulatoren ersetzen und ist schnell ladbar.

Fig. 6-36 Bauformen von Kondensatoren. (Aus [L 6-1], S. 200)

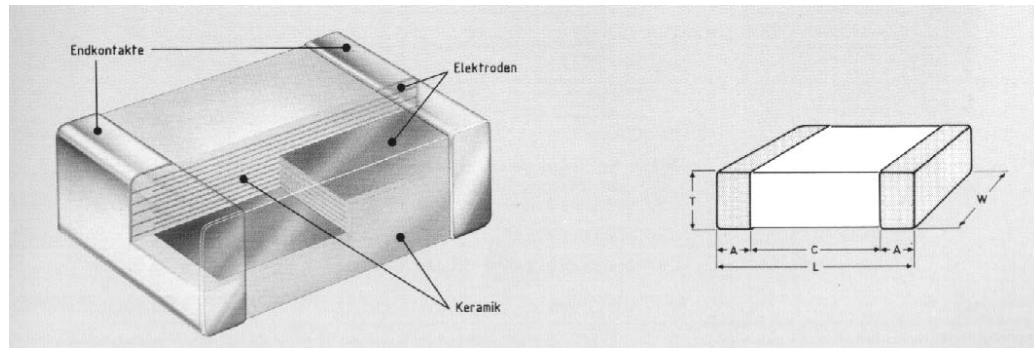


Fig. 6-37 SMD oder Chip Kondensator (Bild Philips)

6.4.2 Ersatzschaltbild für C

Das Bauelement Kondensator C ist nicht ideal. Damit für den praktischen Einsatz eine Beschreibung möglich wird, arbeiten wir mit einem Ersatzschaltbild.

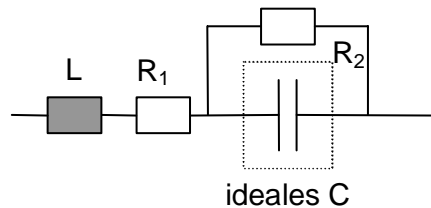


Fig. 6-38 Ersatzschaltbild für C

Im tiefen Frequenzbereich bis etwa 1 MHz dürfen – ausser bei Elektrolyten - die parasitären Elemente L, R_1 und R_2 weggelassen werden.

In den Schemata ¹⁵ für theoretische Betrachtungen gilt das Symbol für ideales C. In praktischen Anwendungen steht hinter jedem C – Symbol das gegebene Ersatzschaltbild.

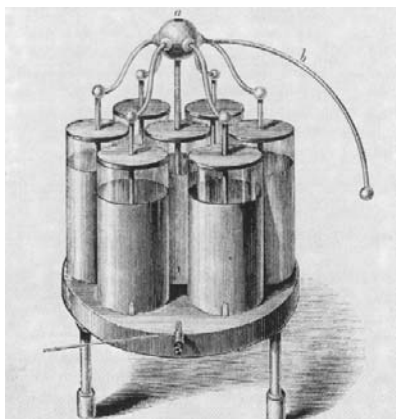


Fig. 6-39 Batterie Leidener Flaschen. 18tes Jhd. (Aus [L 6-5], S.31)

Die Leidener Flasche, von VOLTA später Kondensator genannt, wird von Kleist gefunden. Ewald Jürgen VON KLEIST, - 1748, ist Jurist und Gutsbesitzer, der sich in Mussestunden mit elektrischen Experimenten beschäftigt.

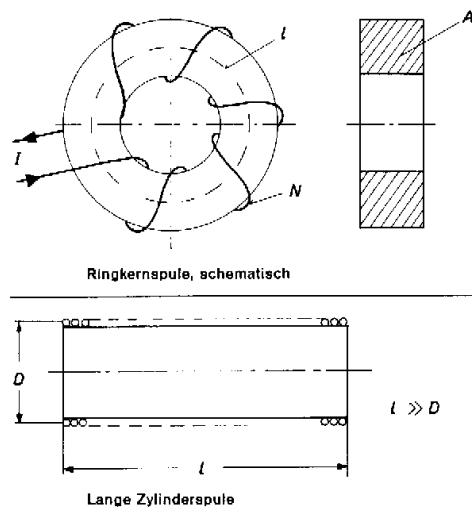
Pieter VAN MUSSCHENBROEK, , Physiker und Mathematiker an der Universität Leiden findet die „Leidener“ – Flasche ein Jahr nach und unabhängig von KLEIST.

Leidener – Flaschen sind für viele Jahre die einzige Ladungsquelle für elektrische Experimente.

¹⁵ Stromlaufplänen. Schema = Stromlaufplan. Engl.: Schematic diagram, Scheme.

6.5 Das Bauelement L

6.5.1 Bauformen der Induktivität



Induktivitäten sind gewickelte Spulen, deren Kern aus „Luft“ oder einem ferromagnetischen Material besteht. Als „Luft“ gelten auch tragende Körper aus dia- oder paramagnetischem Isolations - Material wie Kunststoffe und Papiere.

Ferromagnetische Materialien wie Weicheisenbleche, Ferrite dienen der Erhöhung des L – Wertes und der Führung des mit einer Spule verknüpften magnetischen Feldes.

Ferrite sind Verbindungen aus Eisenoxid mit Oxyden anderer Metalle. Die fein gemahlene Oxyde werden in Formen gepresst und wie Keramik gebrannt (Metallkeramik).

Fig. 6-40 Induktivitäten. (Aus [L 6-1], S.95)

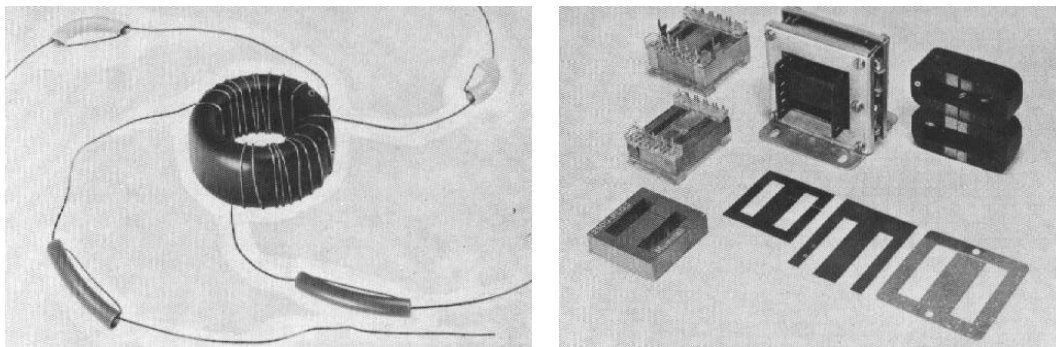


Fig. 6-41 Ferrit - Ringkern und Weicheisenbleche. (Aus [L 6-1], S.95,99)

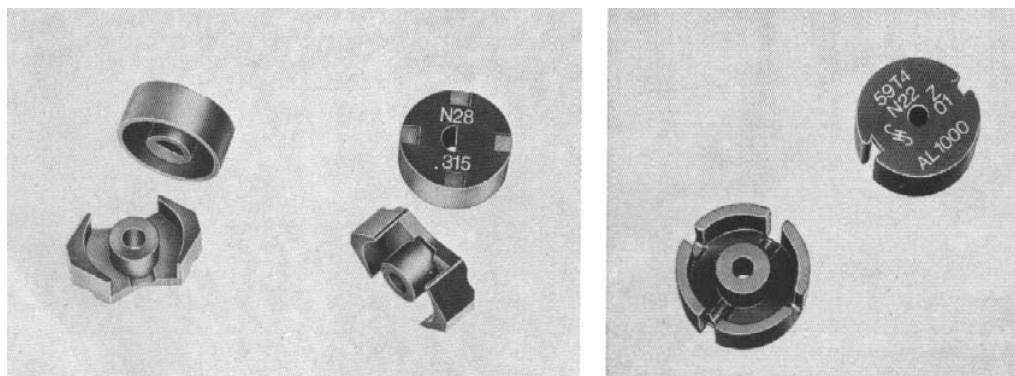


Fig. 6-42 Ferrit – Schalenkerne. (Aus [L 6-1],S.100)

6.5.2 Ersatzschaltbild für L

Das Bauelement Kondensator L ist nicht ideal. Damit für den praktischen Einsatz eine Beschreibung möglich wird, arbeiten wir mit einem Ersatzschaltbild.

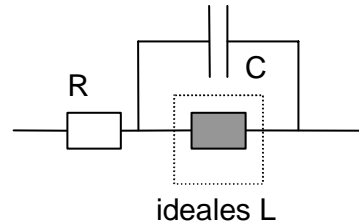


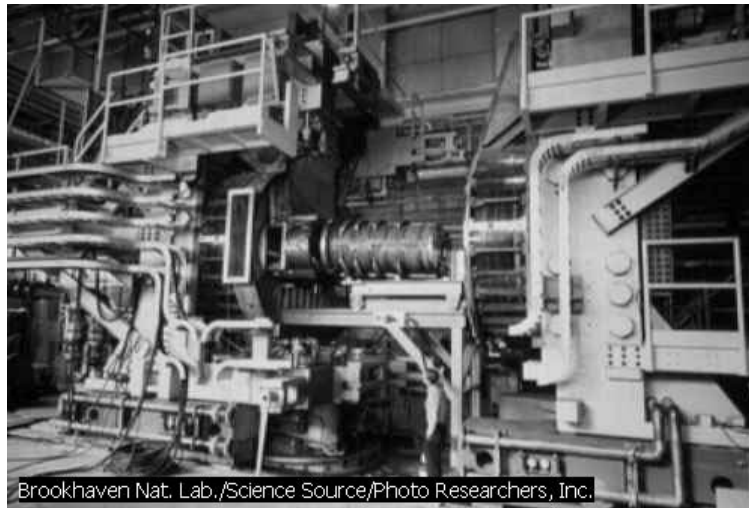
Fig. 6-43 Einfaches Ersatzschaltbild für L

In den Schemata für theoretische Betrachtungen gilt das Symbol für ideales L. In praktischen Anwendungen steht hinter jedem L – Symbol das gegebene Ersatzschaltbild.

6.6 Anhang

6.6.1 Blasenkammer

Sie wurde 1952 von dem amerikanischen Physiker Donald Glaser erfunden und ähnelt in ihrer Funktionsweise der Nebelkammer. In einer Blasenkammer wird eine Flüssigkeit unter Druck bei einer Temperatur knapp unter dem Siedepunkt gehalten. Der Druck wird unmittelbar vor dem Eintreffen von Teilchen plötzlich verringert. Durch den Druckabfall wird die Siedetemperatur verringert; jedoch kann die Flüssigkeit nicht augenblicklich siedet, sondern erst, wenn Verunreinigungen oder Störungen vorliegen. Letztere werden z.B. durch ein hoch energetisches Teilchen hervorgerufen, und es entstehen entlang dessen Flugbahn durch die Flüssigkeit feine Bläschen. Wenn man direkt nach dem Durchflug des Teilchens die Kammer photographiert, erhält man aufgrund der Bläschen ein Abbild der Teilchenbahn. Ähnlich wie die Nebelkammer kann man auch die Blasenkammer in einem **Magnetfeld** betreiben, um die Energien geladener Teilchen zu bestimmen. Viele Blasenkammern werden inzwischen mit **supraleitenden Magneten** anstelle der gewöhnlichen versehen. Mit Hilfe von Blasenkammern, die mit flüssigem Wasserstoff gefüllt sind, kann man die Wechselwirkungen zwischen beschleunigten Teilchen und den Wasserstoffkernen untersuchen.



In der Blasenkammer des Brookhaven National Laboratory auf Long Island in New York wurde 1964 von 33 Physikern das Omega-Hyperon entdeckt, ein Elementarteilchen aus der Familie der Baryonen. Brookhaven Nat. Lab./Science Source/Photo Researchers, Inc.



Bahnspuren der in die Blasenkammer eingeschossenen elektrischen Teilchen werden mit einem Scanner aufgezeichnet. Aus der Bahnlänge und -krümmung lassen sich Ladung, Energie und Impuls berechnen. Parker/Science Source/Photo Researchers, Inc.

6.6.2 NMR

Bruker BioSpin systems, accessories and software embrace a full range of applications. We offer the most comprehensive set of technology platforms including **nuclear magnetic resonance (NMR)**, electron paramagnetic resonance (EPR), magnetic resonance imaging (MRI), benchtop process analysis by NMR/EPR and **superconducting magnets**. Our substantial efforts in research and development assure our commitment to innovation for customers.

NMR Magnets

The world's largest manufacturer of **superconducting magnets** for **NMR**. Since 1960, Bruker BioSpin Magnet Division has specialized in the design and production of magnets and cryogenic systems for a wide range of applications. Involved in every aspect of the magnet business including: R&D, production and testing, individual site planning, as well as service and support.

UltraShield™



54mm
300–700
MHz
89mm
300–600
MHz

Ultrastabilized™



54 mm
800-900
MHz
89 mm
750 MHz

US²™



54 mm
800 MHz

www.bruker.ch, Fällanden

Mit Hilfe von NMR - Anlagen von Bruker hat Prof. Wüthrich ETHZ 2002 den Nobelpreis gewonnen.

6.7 Verzeichnisse

6.7.1 Literaturverzeichnis

L 6-1	Dabrowski G., Bauelemente der Elektronik, AT Verlag, Aarau/Schweiz, 1972.
L 6-2	Frohne Heinrich, Löcherer Karl-Heinz und Müller Hans, Grundlagen der Elektrotechnik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1996, ISBN 3-519-46400-4.
L 6-3	Gren Joachim und Krause Joachim, Metzler Physik, Verlag Schroedel, Hannover, 1998, ISBN 3-507-10700-7.
L 6-4	MATHCAD® 2000. Mathematiksoftware, die sich für numerische Rechnungen und Laborauswertungen eignet.
L 6-5	Sattelberg Kurt, Vom Elektron zur Elektronik, Eine Geschichte der Elektrizität, AT Verlag, Aarau/Schweiz, 1982, ISBN 3-855-02144-9.
L 6-6	Tabellenbuch Informations- und Telekommunikationstechnik, Verlag Dr. Max Gehlen, Bad Homburg vor der Höhe, 1998, ISBN 3-441-92102-x

6.7.2 Figurenverzeichnis

Fig. 6-1	Stromsprung an C	4
Fig. 6-2	Sprungantwort von C.....	4
Fig. 6-3	Schaltung zur Sprungantwort des Kondensators C	5
Fig. 6-4	Spannungssprung an L	5
Fig. 6-5	Sprungantwort von L	5
Fig. 6-6	Schaltung zur Sprungantwort der Induktivität L	6
Fig. 6-7	Stromkreis mit R und C	6
Fig. 6-8	Spannungssprung auf R und C	7
Fig. 6-9	Ladekurve an C	7
Fig. 6-10	Stromverhalten in C.....	8
Fig. 6-11	Realisierung mit Schalter auf R und C	9
Fig. 6-12	Stromkreis mit R und L.....	9
Fig. 6-13	Spannungssprung auf R und L.....	9
Fig. 6-14	Spannungsverhalten an L.....	10
Fig. 6-15	Stromverhalten in L	11
Fig. 6-16	Realisierung mit Schalter auf R und L.....	11
Fig. 6-17	Quelle wirkend auf C	12
Fig. 6-18	Quelle wirkend auf L.....	12
Fig. 6-19	Rechtecksignal wirkend auf R und C	12
Fig. 6-20	Spannung an C bei Rechteckspeisung	12
Fig. 6-21	Integrierglieder.....	13
Fig. 6-22	Integration.....	13
Fig. 6-23	Differenzierglieder	14
Fig. 6-24	Reale Differenziation	14
Fig. 6-25	Ideale Differenziation.....	14
Fig. 6-26	Ideale Quellen für sinusförmiges Signal.....	15
Fig. 6-27	Sinusförmiges Signal [Mit L 0-4].....	15
Fig. 6-28	Zeiger- und Zeitdarstellung.....	16
Fig. 6-29	R und sinusförmiges Signal.....	17
Fig. 6-30	C und sinusförmiges Signal.....	18
Fig. 6-31	Impedanzverhalten von C.....	18
Fig. 6-32	Spannungs- und Stromzeiger an C	18
Fig. 6-33	L und sinusförmiges Signal	19
Fig. 6-34	Impedanzverhalten von L	19
Fig. 6-35	Spannungs- und Stromzeiger an L.....	19
Fig. 6-36	Bauformen von Kondensatoren. (Aus [L 0-3], S. 200)	20

Fig. 6-37	SMD oder Chip Kondensator (Bild Philips)	21
Fig. 6-38	Ersatzschaltbild für C.....	21
Fig. 6-39	Batterie Leidener Flaschen. 18tes Jhd. (Aus [L 0-5], S.31)	21
Fig. 6-40	Induktivitäten. (Aus [L 0-1], S.95)	22
Fig. 6-41	Ferrit - Ringkern und Weicheisenbleche. (Aus [L 0-1], S.95,99).....	22
Fig. 6-42	Ferrit – Schalenkerne. (Aus [L 0-1],S.100).....	22
Fig. 6-43	Einfaches Ersatzschaltbild für L	23

6.7.3 Tabellenverzeichnis

Tabelle 6-1	Symbol, Bezeichnung und Dimension von L und C	3
Tabelle 6-2	Formelsatz zu L und C.....	3
Tabelle 6-3	Zeigerdarstellung für Spannung und Strom.....	17
Tabelle 6-4	Zusammenstellung Widerstand und Impedanz	20

6.7.4 Stichwortverzeichnis

Bauelement C.....	20	sinusförmiges Signal	15
Bauelement L	22	sinusförmiges Signal an C.....	15
Blasenkammer	23	sinusförmiges Signal an L	15
Ersatzschaltbild für L.....	23	Spannung und Strom an C.....	3
Figuren	26	Spannung und Strom an L	3
Induktanz.....	19	Sprungantwort von C.....	4
Induktivität L	3	Sprungantwort von L	5
Inhalt.....	2	Sprungantworten	4
Inhaltsverzeichnis.....	2	Stichworte.....	27
Kapazität.....	18	Strom und Spannung an C.....	3
Kapazität C	3	Strom und Spannung an L	3
Literatur	26	Stromkreis	
nichtsinusförmiges Signal an C.....	4	mit R und C	6
nichtsinusförmiges Signal an L	4	mit R und L.....	9
nuclear magnetic resonance	25	Tabellen.....	27
Sachwortregister	27		