

Elektrotechnik Grundlagen

Kurs 2

Kapitel 2

Schaltungen mit R, L und C für sinusförmige Signale

Ein- und Zweitore mit LC-Kombinationen

Inhaltsverzeichnis

2	Schaltungen mit R, L und C für sinusförmige Signale	3
2.1	Eintore mit L – C - Kombinationen	3
2.1.1	Der ideale Serie - Kreis	3
2.1.2	Der ideale Parallel - Kreis	3
2.1.3	Der reale Serie - Kreis	4
2.1.4	Der reale Parallel - Kreis	6
2.1.5	Der reale Parallel - Kreis für $k \gg 1$	9
2.1.6	Umformung am Parallelkreis.....	12
2.1.7	Der Begriff „kritische Impedanz“ oder „charakteristische Impedanz“.....	12
2.1.8	Spannungs- und Stromüberhöhung.....	13
2.1.9	Serie – Parallel - Wandlung	14
2.2	Zweitore mit L – C - Kombinationen	15
2.2.1	Zweitore mit unbelastetem Ausgang.....	15
2.2.2	Zweitore mit belastetem Ausgang.....	17
2.2.3	Durchlassfilter und Einfügungsdämpfung	20
2.2.4	Weitere Zweitor – Schaltungen	21
2.3	Verzeichnisse	23
2.3.1	Literaturverzeichnis und Software.....	23
2.3.2	Figurenverzeichnis	23
2.3.3	Stichwortverzeichnis	24

2 Schaltungen mit R, L und C für sinusförmige Signale

2.1 Eintore mit L – C - Kombinationen

2.1.1 Der ideale Serie - Kreis

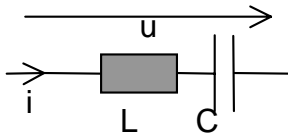


Fig. 2-1 Idealer Serie - Kreis

Das Eintor Serie - Kreis wird auch Saugkreis genannt.

Es gilt:

$$Z_{AB} = j \cdot \omega L + \frac{1}{j \cdot \omega C} = j \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \quad (2-1)$$

und daraus $|Z_{AB}| = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = \frac{|\omega^2 LC - 1|}{\omega C}$

Dabei wird $Z_{AB} = 0$ für $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ beziehungsweise für $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$.¹ (2-2)

Die Frequenz f_0 nennen wir Resonanzfrequenz (Resonanz).

Das Winkelverhalten (der Phasengang) zwischen u und i ergibt sich zu:

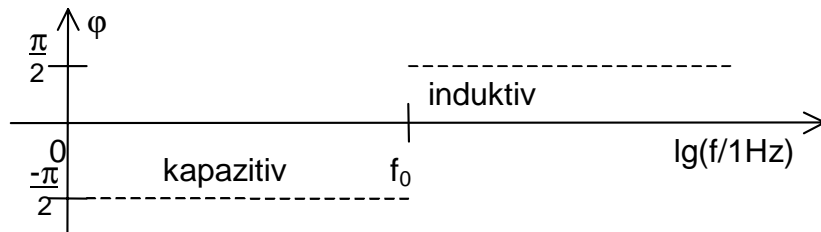


Fig. 2-2 Phasengang des idealen Serie Kreises

2.1.2 Der ideale Parallel - Kreis

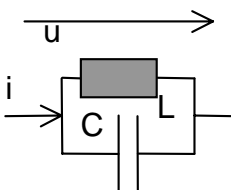


Fig. 2-3 Idealer Parallel - Schwingkreis

Das Eintor Parallel - Kreis wird auch Sperrkreis genannt.

Es gilt:

$$Z_{AB} = j \cdot \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (2-3)$$

und daraus $|Z_{AB}| = \frac{\omega L}{|1 - \omega^2 LC|}$

Dabei geht $Z_{AB} \rightarrow \infty$ für $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ beziehungsweise für $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$.

¹ Schwingungsformel

Die Frequenz f_0 nennen wir **Resonanzfrequenz** (Resonanz).

Das Winkelverhalten (der Phasengang) zwischen u und i ergibt sich zu:

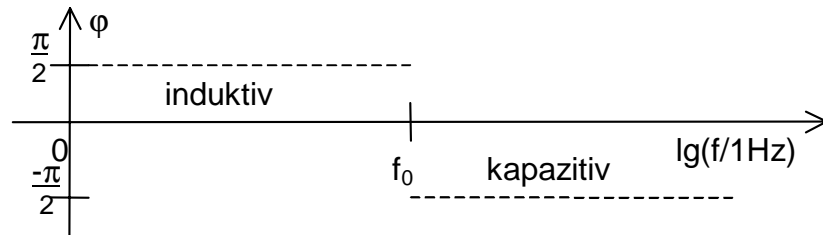
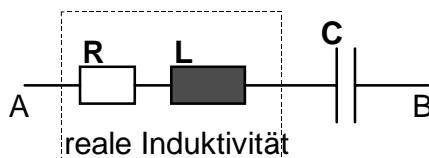


Fig. 2-4 Phasengang des idealen Parallelkreises

In der Wirklichkeit kommen ideale Induktivitäten und Kapazitäten nicht vor. In einem ersten, einfachen Modell lassen sich Induktivitäten als Spulen mit einem Seriewiderstand darstellen und Kapazitäten als nahezu ideal auffassen.²

2.1.3 Der reale Serie - Kreis ³



Das Eintor Serie - Schwingkreis wird auch Saugkreis genannt.

$$\text{Es gilt: } Z_{AB} = R + j \cdot \omega L + \frac{1}{j \cdot \omega C}$$

Fig. 2-5 Realer Serie - Kreis

und daraus

$$\frac{Z_{AB}}{R} = 1 + j \cdot Q_S \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{Z_{AB}}{R} = \frac{\Omega - j \cdot Q_S (1 - \Omega^2)}{\Omega} \quad (2-4)$$

mit der Normierung

$$\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC, \quad Q_S \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}, \quad \frac{1}{Q_S} \cdot \Omega = \omega \cdot RC, \quad \text{worin } Q_S = \frac{\sqrt{L}}{R} \sqrt{C} \quad (2-5)$$

² Mit zunehmender Frequenz werden an einer Induktivität auch Kapazität und Parallelwiderstand wirksam. Ebenso werden an einer Kapazität auch Induktivität, sowie Serien- und Parallelwiderstand wirksam.

³ L und C sind Energiespeicher. In L-C-Kombinationen kann zwischen L und C Energie ausgetauscht werden (hin- und herpendeln). Das geschieht durch äussere Anregung (Quellen, aktive Elemente).

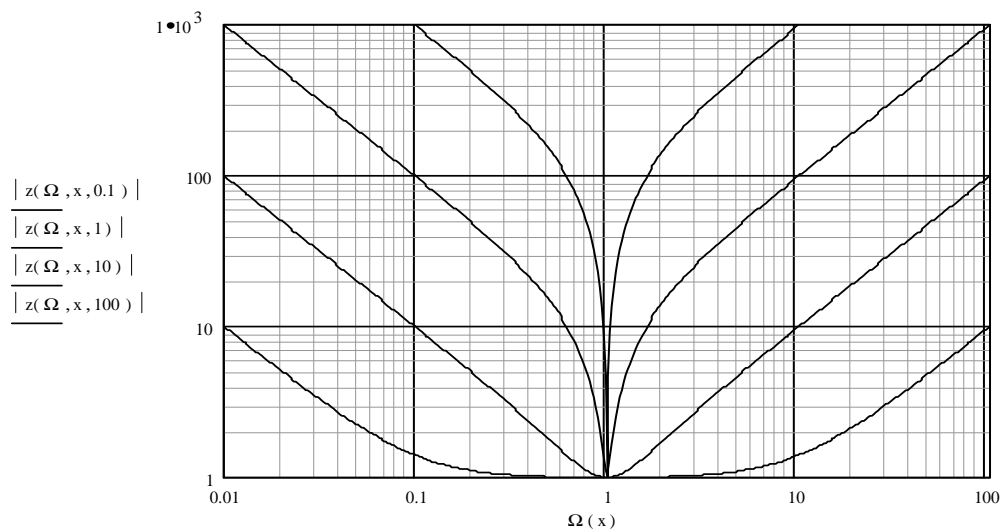


Fig. 2-6 Impedanzverhalten mit $z = Z_{AB}/R$ und $Q_S = 0,1, 1, 10$ und 100

Die Impedanz des R-L-C- Seriekreises wird an der Stelle $\Omega_0 = 1$ reell und minimal.⁴

Die **Güte** Q_S ergibt sich aus dem Verhältnis der Mittenfrequenz oder **Resonanzfrequenz** zur Bandbreite. Die Resonanzfrequenz $\Omega_0 = 1$ zeigt sich an jener Stelle, wo die Impedanz minimal wird; dies aus der

$$\text{Bestimmungsgleichung } \left. \frac{d \frac{|Z_{AB}|}{R}(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega_0} = 0 \text{ für } \Omega_0.$$

Die **Bandbreite** $B = \Omega_2 - \Omega_1$ errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für die beiden $\Omega_{1,2}$: $\frac{|Z_{AB}|}{R}(\Omega_{1,2}) = \frac{|Z_{AB}|}{R}(\Omega_0) \cdot \sqrt{2}$. Die beiden Eckfrequenzen Ω_1 und Ω_2 bezeichnen jene Stellen, an denen die Impedanz in ihrem Betrag um den Faktor $\sqrt{2}$ über der minimalen Impedanz liegt.

Es ergeben sich

$$\text{für die Bandbreite} \quad B = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{1}{Q_S} \quad (2-6)$$

$$\text{und für die Güte} \quad Q_S = k = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad (2-7)$$

⁴ Diese Eigenschaft begründet den Begriff Saug-Kreis.

Das Winkelverhalten zwischen Spannung und Strom wird aus (6.13):

$$\varphi_{[u/i]} = \arctan\left[Q_S \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right] \quad (2-8)$$

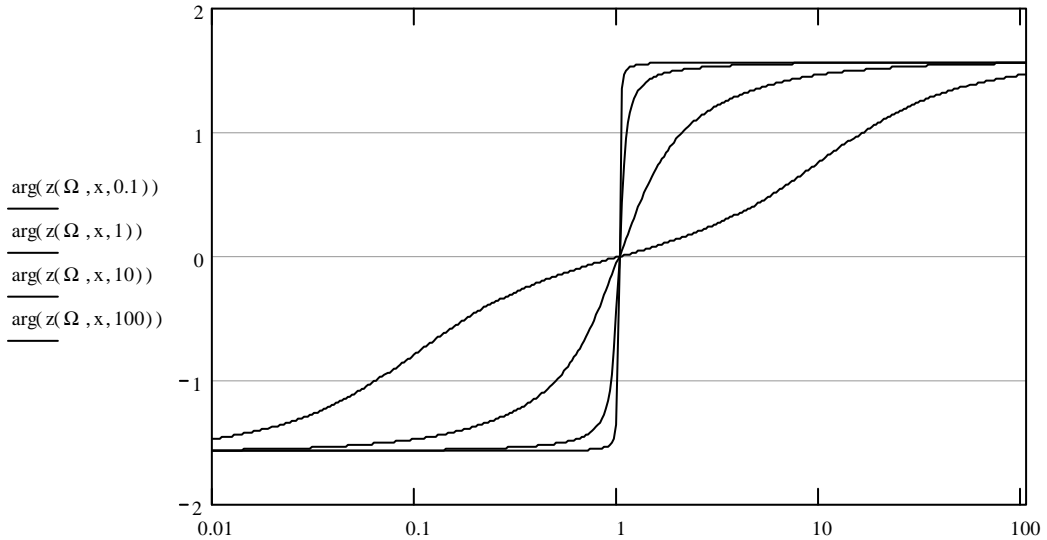


Fig. 2-7 Winkelverhalten in rad mit $Q_S = 0,1, 1, 10$ und 100

Der Ausdruck $\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)$ in (6.13) und (6.16) lässt sich mit $\Omega_0=1$ auch schreiben als

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega}\right) = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right) = v \quad (2-9)$$

v wird **Verstimmung** genannt.

2.1.4 Der reale Parallel - Kreis ⁵

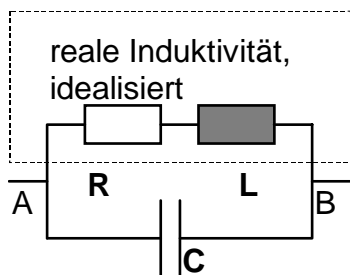


Fig. 6.4/8 Realer Parallelkreis

Für den realen Parallel - Schwingkreis gilt:

$$Z_{AB} = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

und daraus

$$\frac{Z_{AB}}{R} = \frac{1 + j \cdot k\Omega}{(1 - \Omega^2) + j \cdot \frac{1}{k}\Omega} \quad \text{oder} \quad \frac{Z_{AB}}{R} = k \cdot \frac{1 + j \cdot k\Omega}{k \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega} \quad (2-10)$$

⁵ L und C sind Energiespeicher. In L-C- Kombinationen kann zwischen L und C Energie ausgetauscht werden (hin- und herpendeln). Das geschieht durch äussere Anregung (Quellen, aktive Elemente).

mit der Normierung

$$\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC, \quad k \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}, \quad \frac{1}{k} \cdot \Omega = \omega \cdot RC, \quad \text{worin } k = \frac{\sqrt{L}}{R} \quad (2-11)$$

Die Impedanz des R-L-C - Parallelkreises wird, wie die Fig. 2-6 zeigt, an der Stelle Ω_{0P} maximal; dabei ist die Resonanzfrequenz Ω_{0P} von k (6.25) abhängig. Es wird nötig, Ω_{0P} eingehender zu untersuchen.

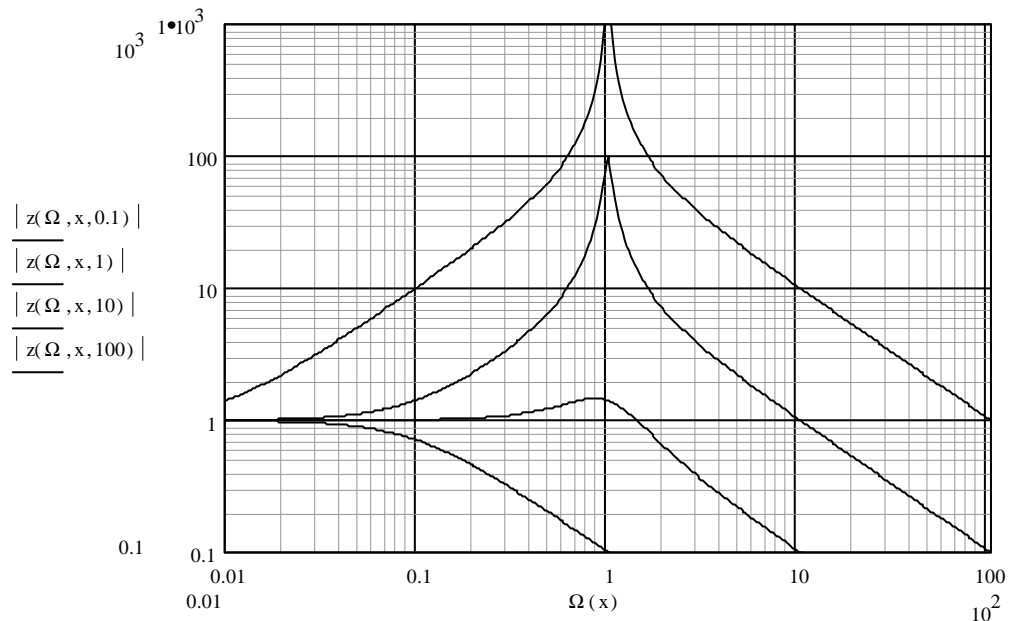


Fig. 2-8 Impedanzverhalten mit $z = Z_{AB}/R$ und $k = 0,1, 1, 10$ und 100

Die **Güte Q_P** ergibt sich aus dem Verhältnis der Mittenfrequenz oder **Resonanzfrequenz** zur Bandbreite. Die Resonanzfrequenz Ω_{0P} zeigt sich an jener Stelle, wo die Impedanz $|Z_{AB}|$ maximal wird; dies aus der

$$\text{Bestimmungsgleichung } \left. \frac{d \frac{|Z_{AB}|}{R}(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega_{0P}} = 0 .$$

Die Herleitung zeigt für Ω_{0P} :

$$\Omega_{0P} = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{2 + k^2} - 1} = \sqrt{1 + \frac{2}{k^2} - \frac{1}{k^2}} \quad (2-12)$$

$$\text{worin } k = \frac{\sqrt{L}}{R}$$

An der Stelle Ω_{0P} (Resonanzfrequenz) stellt sich die maximale Impedanz ein.

$$\Omega_{0P} \text{ eingesetzt in (6.24): } \frac{|Z_{AB}|_{\text{Max}}}{R} = \frac{k^2}{\sqrt{2k \cdot \sqrt{k^2 + 2} - (2k^2 + 1)}} \quad (2-13)$$

Die **Bandbreite B** = $\Omega_2 - \Omega_1$ errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für die beiden $\Omega_{1,2}$: $\frac{|Z_{AB}|}{R}(\Omega_{1,2}) = \frac{|Z_{AB}|}{R}(\Omega_{0P}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|Z_{AB}|_{\text{Max}}}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die beiden Eckfrequenzen Ω_1 und Ω_2 bezeichnen jene Stellen, an denen die Impedanz in ihrem Betrag um den Faktor $\sqrt{2}$ unter der maximalen Impedanz liegt.

Die Bandbreite ergibt sich damit zu:

$$B = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{4k \cdot \sqrt{k^2 + 2} - (2k^2 + 3) - 2 \cdot \sqrt{(k^2 + 2)^2 - 2 - 4k \cdot \sqrt{k^2 + 2}}} \quad (2-14)$$

und die Güte Q_P wird

$$Q_{0P} = \frac{\Omega_{0P}}{B} = \sqrt{\frac{k \cdot \sqrt{k^2 + 2} - 1}{4k \cdot \sqrt{k^2 + 2} - (2k^2 + 3) - 2 \cdot \sqrt{(k^2 + 2)^2 - 2 - 4k \cdot \sqrt{k^2 + 2}}} \quad (2-15)$$

Ein Maximum für die Impedanz $|Z_{AB}|$ existiert nur für $k > \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Für $k \leq \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ wird der Wurzel Ausdruck im Zähler Null oder negativ.

Im Impedanzmaximum $|Z_{AB \text{ Max}}|$ wirkt das Eintor, der Parallelschwingkreis, an den Klemmen AB nicht reell, sondern komplex, genauer kapazitiv.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussage.

Damit das Eintor an den Klemmen AB reell wirkt, muss $\Omega_{\text{reell}} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$ sein.⁶

Der **Phasengang** $\varphi_{[u_a/u_e]}(\Omega)$ oder das Winkelverhalten zwischen Spannung und Strom wird aus (6.24):

$$\varphi_{[u_a/u_e]} = \arctan \left\{ \frac{\Omega}{k} \cdot [k^2 \cdot (1 - \Omega^2) - 1] \right\} \quad (2-16)$$

⁶ Wenn das Eintor an den Klemmen AB reell wirkt, gilt es als kompensiert. An der Stelle Ω_{reell} gilt $C = L / [(2\pi f L)^2 + R^2]$.

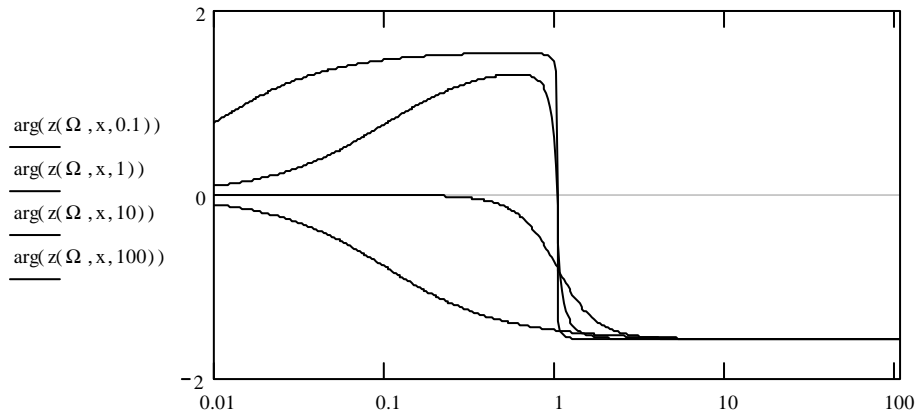


Fig. 2-9 Winkelverhalten in rad mit $k = 0,1, 1, 10$ und 100

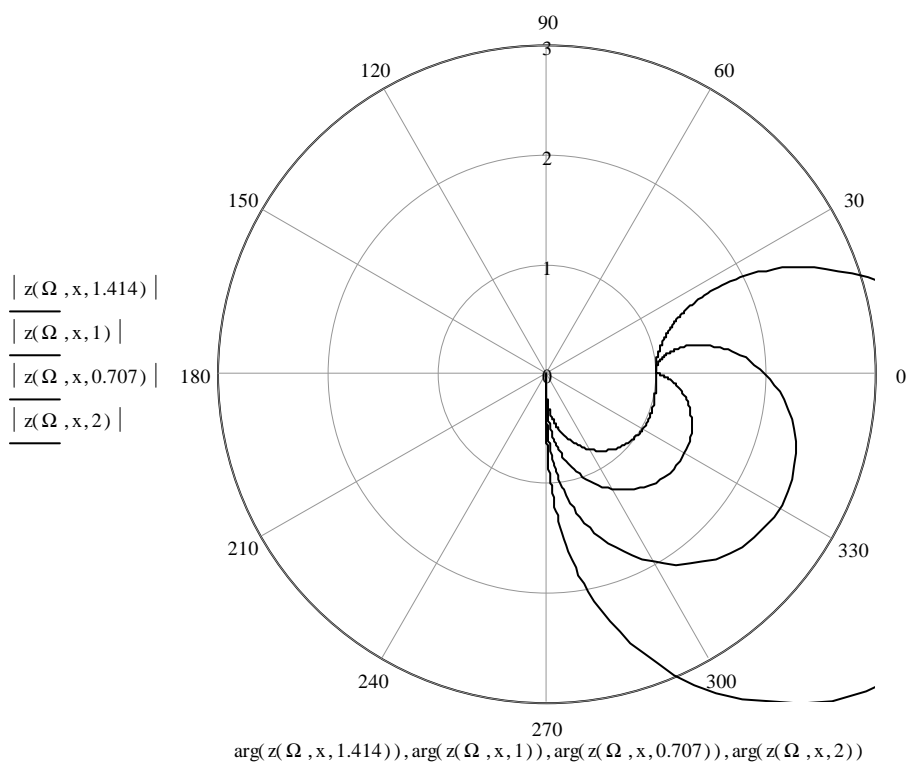


Fig. 2-10 Ortskurve mit $k < 2$

2.1.5 Der reale Parallel - Kreis für $k \gg 1$

Die Formeln (6.26) bis (6.29) lassen sich stark vereinfachen, wenn der Faktor k nach (6.25) gross (unendlich gross) wird.⁷

Für $k \rightarrow \infty$ gelten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{k^2} - \frac{1}{k^2}} \right) = \underline{\underline{\Omega_0 = 1}} \quad (2-17)$$

⁷ In vielen Anwendungen der Hochfrequenztechnik ist diese Bedingung erfüllt.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^2}{\sqrt{2k \cdot \sqrt{k^2 + 2} - (2k^2 + 1)}} \right) = \frac{|Z_{AB}|_{\text{Max}}}{R} = k^2 \quad (2-18)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \sqrt{4k \cdot \sqrt{k^2 + 2} - (2k^2 + 3) - 2 \cdot \sqrt{(k^2 + 2)^2 - 2 - 4k \cdot \sqrt{k^2 + 2}}} \right) = B = \frac{1}{k} \quad (2-19)$$

Daraus wird für $k \rightarrow \infty$ die Güte Q_P zu $Q_P = k = \frac{\sqrt{L}}{R} \sqrt{C}$ (2-20)

Bevor mit den vereinfachten Formeln (6.31) bis (6.34) gerechnet wird, ist zu prüfen, ob k genügend gross ist.

Fehlerbetrachtung

Die normierte Kreisfrequenz Ω_{0P} stellt sich nicht bei $\Omega_0 = 1$ ein, sondern ist stets etwas kleiner als 1 und abhängig von k . Es interessiert, wie gross der Fehler $\Omega_0 - \Omega_{0P}$ zu Ω_{0P} ist, beziehungsweise wie gross k gewählt werden muss, damit ein vorgegebener Fehler für die Resonanzfrequenz nicht überschritten wird.

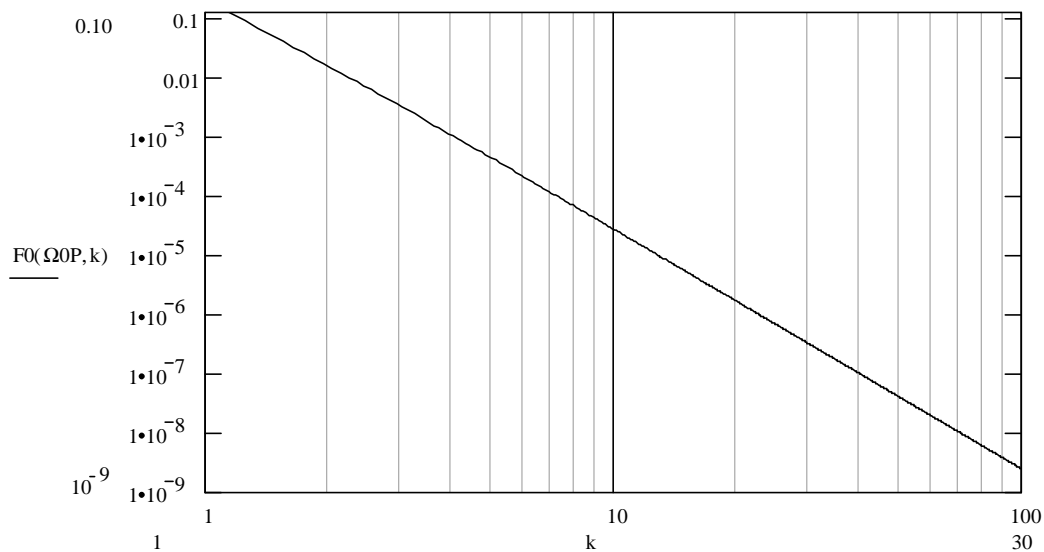


Fig. 2-11 Fehler der normierten Kreisfrequenz in Abhängigkeit von k

Die maximale Impedanz stellt sich an der Stelle Ω_{0P} ein und weicht von der Näherung $Z_{\text{Max}} = k^2 R$ ab. Es interessiert der Fehler dieser Abweichung:

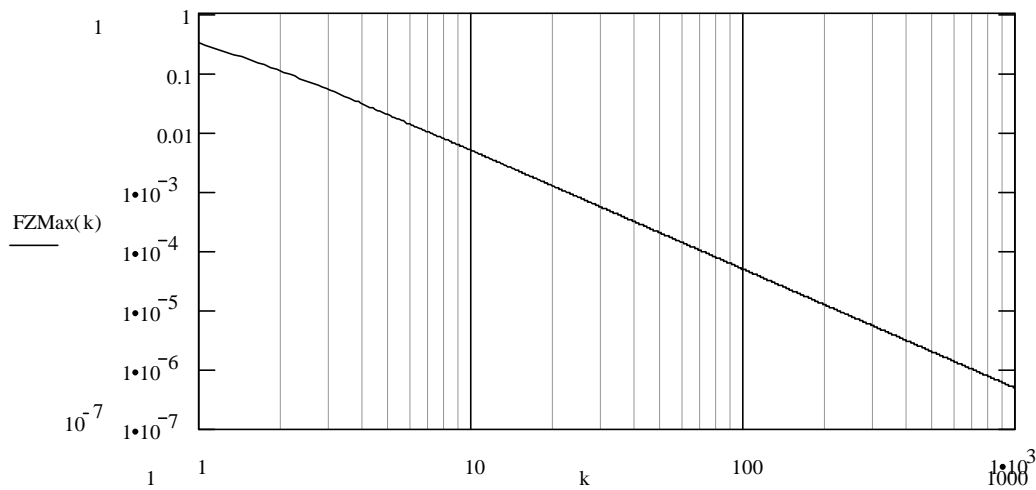


Fig. 2-12 Fehler des maximalen Impedanzwertes, abhängig von k

Die Güte Q_{0P} ergibt sich aus dem Verhältnis der Kreisfrequenz Ω_{0P} zur Bandbreite B. Die Güte Q_{0P} weicht vom Idealwert k ab. Es interessiert dieser Fehler:

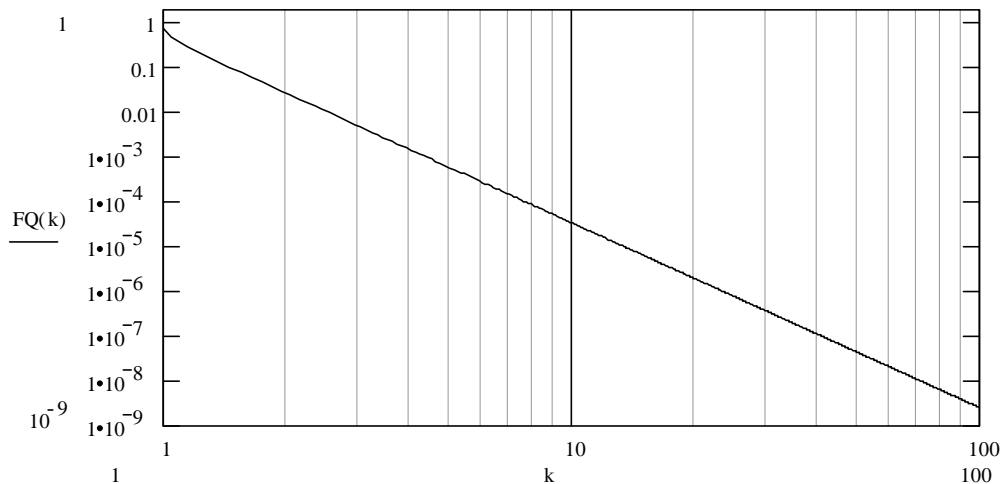


Fig. 2-13 Fehler der Güte, abhängig von k

Aufgabe: Beweisen Sie die Formeln (6.27) und (6.28) und prüfen Sie die Aussagen (6.31) bis (6.34) nach.

2.1.6 Umformung am Parallelkreis

Für eine bestimmte Frequenz lassen sich R-L- Serieschaltungen umwandeln in R-L- Parallelschaltungen. Für eine vorgegebene Frequenz lässt sich mit dem Formelsatz in 2.1.9.2 die Fig. 2-14 umwandeln in die Fig. 2-15:⁸

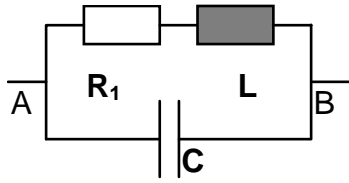


Fig. 2-14 Realer Parallel - Kreis

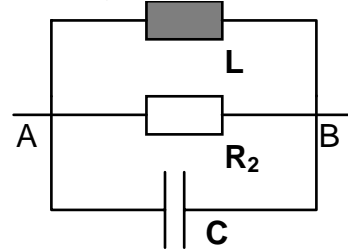


Fig. 2-15 Realer Parallelkreis, gewandelt

Nach der Umwandlung gelten für R_2 und L_2 :

$$R_2 = R_1 \cdot (1 + k^2 \Omega^2) \quad \text{und} \quad L_2 = L_1 \cdot \frac{(1 + k^2 \Omega^2)}{k^2 \cdot \Omega^2}, \quad \text{worin } \Omega = \omega \sqrt{LC} \quad \text{und} \quad k = \frac{\sqrt{L}}{R} \quad (2-21)$$

Für $k \gg 1$ ($k \rightarrow \infty$) werden $L_2 = L_1$ und $R_2 = k^2 \cdot R_1$.

2.1.7 Der Begriff „kritische Impedanz“ oder „charakteristische Impedanz“

Die Formel (6.13) für den R – L – C - Seriekreis lässt sich umformen zu

$$\frac{Z_{AB}}{Q_S R} = \frac{Z_{AB}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{1}{Q_S} + j \cdot \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \quad (2-22)$$

Wir nennen $\sqrt{\frac{L}{C}}$ die «kritische Impedanz» oder auch etwa den «Kennwiderstand»

des R-L-C- Seriekreises. Der Ausdruck $\sqrt{\frac{L}{C}}$ gibt je den Impedanzbetrag der beiden Elemente L und C bei der Resonanzfrequenz f_0 an.

Beweis:

$$\text{Es gelten } |Z_C| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad \text{und} \quad |Z_L| = \omega L = 2\pi f L.$$

$$\text{Für } |Z_C| = |Z_L| \quad \text{wird} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}.$$

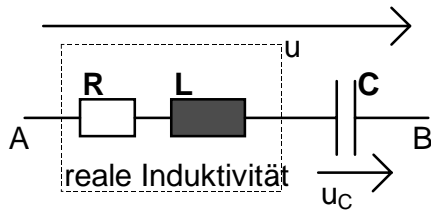
Eingesetzt in $|Z_C|$ und $|Z_L|$ bestätigt sich die gemachte Aussage.⁹

⁸ Oft wird in der Literatur die Parallelschaltung der drei Elemente R, L und C gezeigt. Es bleibt zu beachten, dass dann jeweils die zugehörigen Formeln nur für $k \gg 1$ gelten. Es ist von Fall zu Fall zu prüfen, ob diese Bedingung erfüllt ist.

⁹ In der Literatur werden die Herleitungen nach 2.1 ff manchmal auf $Z_{AB}/\sqrt{L/C}$ basiert und nicht auf Z_{AB}/R . Die Aussagen bleiben dabei erhalten, verschieben sich aber um den Faktor Q_S .

2.1.8 Spannungs- und Stromüberhöhung

2.1.8.1 Die Spannungsüberhöhung im Serieschwingkreis¹⁰



Im Seriekreis finden wir:

$$\frac{u_C}{u} = \frac{Q_S}{Q_S \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega} \quad \text{und}$$

$$\frac{u_{RL}}{u} = \frac{Q_S \cdot \Omega^2 - j \cdot \Omega}{Q_S \cdot (\Omega^2 - 1) - j \cdot \Omega}$$

Fig. 2-16 Realer Serie - Kreis

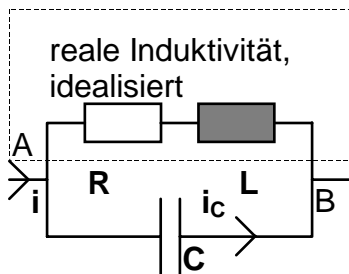
Die beiden Spannungen u_C und u_{RL} können die Spannung u überschreiten. Die grösste Spannungsüberhöhung wird im Resonanzfall erreicht.

Für $\Omega = \Omega_0 = 1$ gelten:

$$\frac{u_C}{u} = \frac{Q_S}{j} = -j \cdot Q_S = Q_S \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad (2-23)$$

$$\frac{u_{RL}}{u} = \frac{Q_S}{-j} - j = j \cdot Q_S + 1 = Q_S \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} + 1 \approx Q_S \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad \text{für } Q_S \gg 1$$

2.1.8.2 Die Stromüberhöhung im Parallelschwingkreis



Im Parallelkreis finden wir:

$$\frac{i_C}{i} = \Omega \cdot \frac{-k \cdot \Omega + j}{k \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega} \quad \text{und}$$

$$\frac{i_{RL}}{i} = \frac{k}{k \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega} \quad \text{worin}$$

$$k = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Fig. 2-17 Realer Parallel - Kreis

Die beiden Ströme i_C und i_{RL} können den Gesamtstrom i überschreiten. Die grösste Stromüberhöhung wird mit $k \gg 1$ im Resonanzfall erreicht.

Für $\Omega = \Omega_0 = 1$ ($k \gg 1$) gelten:

$$\frac{i_C}{i} = j \cdot k + 1 \approx j \cdot k = k \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad (2-24)$$

$$\frac{i_{RL}}{i} = \frac{k}{j} = -j \cdot k = Q_S \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \text{für } k \gg 1 \quad ^{11}$$

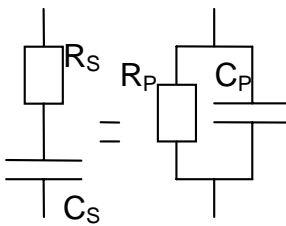
¹⁰ Die Spannungsüberhöhung kann zur Zerstörung eingesetzter Bauelemente führen. Im Kleinsignalbereich sind Halbleiterelemente gefährdet (zum Beispiel Kapazitätsdioden) und im Leistungsbe-
reich sind Spannungsüberschläge zu verhindern.

¹¹ Die Stromüberhöhungen können beträchtlich sein und eingesetzte Bauelemente zerstören.

2.1.9 Serie – Parallel - Wandlung

2.1.9.1 Die Serie – Parallel – Wandlung mit R und C

Für eine bestimmte Frequenz f_0 , ω_0 oder Ω_0 lässt sich die R – C – Serieschaltung umwandeln in eine R – C – Parallelschaltung und umgekehrt.



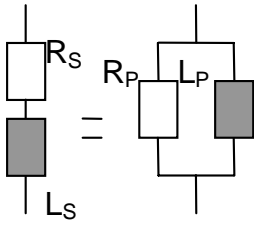
$$\begin{aligned}
 R_P &= R_S \cdot \frac{1 + \Omega_S^2}{\Omega_S^2} & C_P &= C_S \cdot \frac{1}{1 + \Omega_S^2} & \Omega_S &= \omega_0 R_S C_S \\
 R_S &= R_P \cdot \frac{1}{1 + \Omega_P^2} & C_S &= C_P \cdot \frac{1 + \Omega_P^2}{\Omega_P^2} & \Omega_P &= \omega_0 R_P C_P
 \end{aligned}$$

(2-25)

Fig. 2-18 R – C Serie - Parallelwandlung

2.1.9.2 Die Serie – Parallel – Wandlung mit R und L

Für eine bestimmte Frequenz f_0 , ω_0 oder Ω_0 lässt sich die R – L – Serieschaltung umwandeln in eine R – L – Parallelschaltung und umgekehrt.



$$\begin{aligned}
 R_P &= R_S \cdot (1 + \Omega_S^2) & L_P &= L_S \cdot \frac{1 + \Omega_S^2}{\Omega_S^2} & \Omega_S &= \omega_0 \frac{L_S}{R_S} \\
 R_S &= R_P \cdot \frac{\Omega_P^2}{1 + \Omega_P^2} & L_S &= L_P \cdot \frac{1}{1 + \Omega_P^2} & \Omega_P &= \omega_0 \frac{L_P}{R_P}
 \end{aligned}$$

(2-26)

Fig. 2-19 R – L Serie - Parallelwandlung

2.2 Zweitore mit L – C - Kombinationen

2.2.1 Zweitore mit unbelastetem Ausgang

2.2.1.1 Einfacher Bandpass mit hoher Güte

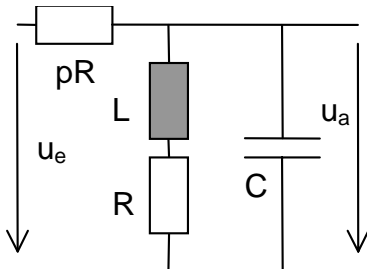


Fig. 2-20 Bandpass

Aus einem Ansatz mit Spannungsteiler und mit der Normierung $\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC$,

$$k \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}, \quad \frac{1}{k} \cdot \Omega = \omega \cdot RC, \quad \text{wird:}$$

$$v(\Omega) = \frac{u_a}{u_e} = \frac{k \cdot (1 + j \cdot k \cdot \Omega)}{k[1 + p(1 - \Omega^2)] + j \cdot [k^2 + p] \cdot \Omega}$$

Analysieren Sie das Zweitor

Analysieren meint, es seien alle charakteristischen Werte zu bestimmen. Charakteristische Werte sind Maxima, Minima, Eckpunkte (3 dB Punkte), Winkelwerte $\pm n \cdot \pi/4$, Grenzwerte, Steigungen, Bandbreite, Güte und so weiter.

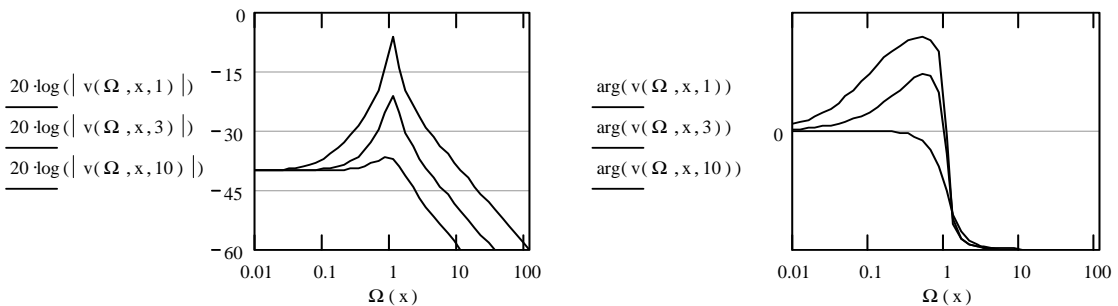


Fig. 2-21 Bandpass mit hoher Güte

2.2.1.2 Vierpoliger Tiefpass

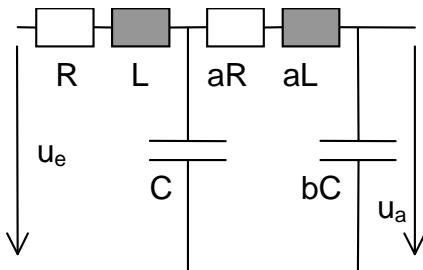


Fig. 2-22 Tiefpass - Filter

Aus einem Knotenansatz und mit der Normierung $\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC$, $k \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}$,

$$\frac{1}{k} \cdot \Omega = \omega \cdot RC, \quad \text{wird:}$$

$$v(\Omega) = \frac{u_a}{u_e} = \frac{k^2}{k^2 - \Omega^2 [ab + k^2(1 + ab + b)] + \Omega^4 k^2 ab + j \cdot k \Omega [1 + ab + b - \Omega^2 2ab]}$$

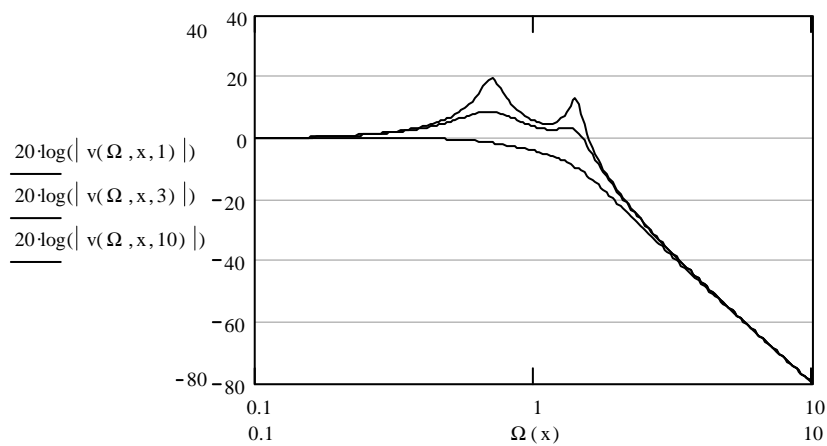


Fig. 2-23 Amplitudengang zu Tiefpass vierpolig

Das Amplitudenverhalten weist Spannungsüberhöhungen auf. Die Spannungsüberhöhung ist abhängig vom Faktor $k = \sqrt{\frac{L}{C}} / R$; sie wird mit zunehmendem k – Wert grösser. Die Amplitude fällt bei höheren Frequenzen mit 80 Dezibel pro Dekade ab.

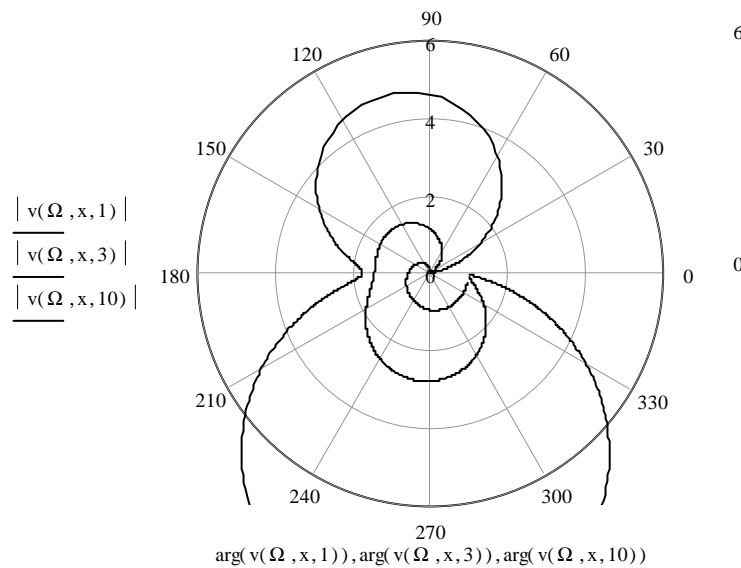


Fig. 2-24 Ortskurve zu Tiefpass vierpolig

2.2.2 Zweitore mit belastetem Ausgang

2.2.2.1 Durchlassfilter mit realem Parallel - Kreis

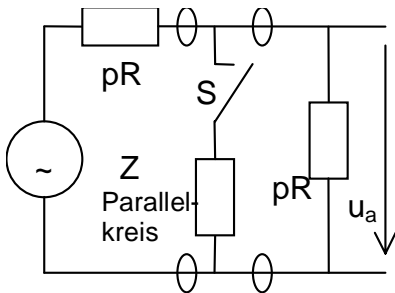


Fig. 2-25 Bandpass unter Anpassung

In der nebenstehenden Anordnung werde die Impedanz Z eines Parallel – Kreises mit dem Schalter S zu- oder weggeschaltet. Die Innenimpedanz Z_i der Quelle und die Lastimpedanz Z_L sind mit $Z_i = Z_L = pR$ als gleich gross und reell angenommen. Es interessiert das Verhalten von u_a bei geschlossenem Schalter. Untersucht wird das Verhältnis

$$v(\Omega) = \frac{u_{a \text{ Schalter zu}}}{u_{a \text{ Schalter offen}}} = \frac{u_{az}}{u_{ao}}$$

Aus 2.1.4 entnehmen wir für Z :

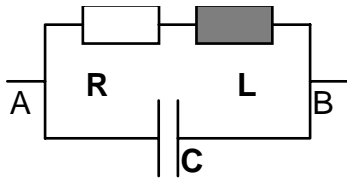


Fig. 2-26 Parallelschwingkreis

Für den realen Parallel - Schwingkreis gilt:

$$Z = R \cdot k \cdot \frac{1 + j \cdot k\Omega}{k \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega}$$

und daraus wird

$$v(\Omega) = \frac{u_{a \text{ Schalter zu}}}{u_{a \text{ Schalter offen}}} = \frac{u_{az}}{u_{ao}} = \frac{2 \cdot Z}{2 \cdot Z + pR} = \frac{2k(1 + j \cdot k\Omega)}{k \cdot [(2 + p) - p\Omega^2] + j \cdot (p + 2k^2) \cdot \Omega} \quad (2-27)$$

weiterhin mit $\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC$, $k \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}$, $\frac{1}{k} \cdot \Omega = \omega \cdot RC$, worin $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Es ist $p \sim k$, da zunehmendes k bei gleichbleibendem C und L bedeutet, dass R kleiner wird und mithin p grösser. Es sei $p = q \cdot k$.

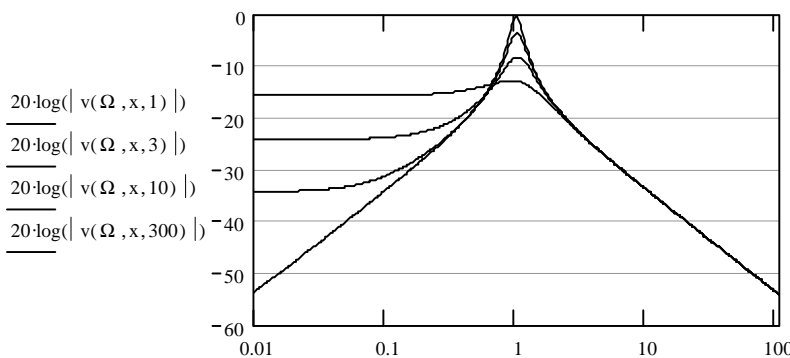


Fig. 2-27 Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelschwingkreis

Bei tiefen Frequenzen besteht eine Anfangsdämpfung, die sich aus $p = q \cdot k$ bestimmt und auf dem Wert $2/(2+p)$ einstellt.

Für $k > 10$ wird diese Anfangsdämpfung bezogen auf das Durchlassverhalten bei $\Omega \approx 1$ in vielen Fällen bedeutungslos.

Es erfolgt daher eine nähere Untersuchung für $k \gg 1$, das heisst $k > 10$.

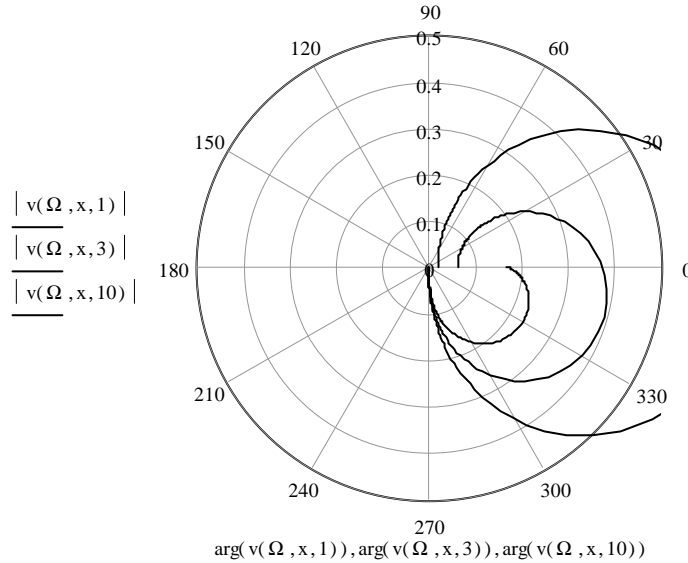


Fig. 2-28 Ortskurve zu Durchlassfilter mit realem Parallelschwingkreis

2.2.2.2 Durchlassfilter mit Parallel – Kreis und $k \gg 1$, das heisst $k > 10$

In 2.1.5 ist ausgeführt, dass für hohe k – Werte ($k > 10$) der reale Parallel – Kreis aufgefasst werden darf als Parallelschaltung von Q^2R , L und C .

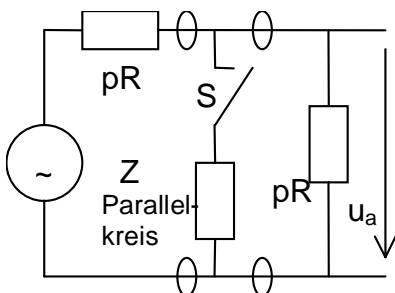


Fig. 2-29 Bandpass unter Anpassung

Es werde die Impedanz Z eines Parallel – Kreises mit dem Schalter S zu- oder weggeschaltet.

Die Innenimpedanz Z_i der Quelle und die Lastimpedanz Z_L sind mit $Z_i = Z_L = pR$ als gleich gross und reell angenommen.

Es interessiert das Verhalten

$$v(\Omega) = \frac{u_{a \text{ Schalter zu}}}{u_{a \text{ Schalter offen}}} = \frac{u_{az}}{u_{ao}}$$

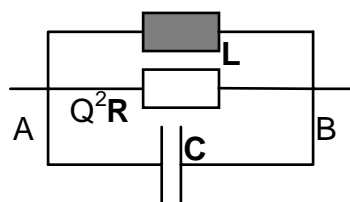


Fig. 2-30 Parallelschwingkreis mit $k > 10$

Für den realen Parallel - Schwingkreis gilt:

$$Z = R \cdot \frac{j \cdot Q^2 \Omega}{Q \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega}$$

und daraus wird

$$v(\Omega) = \frac{u_{a \text{ Schalter zu}}}{u_{a \text{ Schalter offen}}} = \frac{u_{az}}{u_{ao}} = \frac{2 \cdot Z}{2 \cdot Z + pR} = \frac{j \cdot 2Q^2 \Omega}{pQ \cdot [1 - \Omega^2] + j \cdot (p + 2Q^2) \cdot \Omega} \tag{2-28}$$

$$= \frac{2Q^2}{(2Q^2 + p) + j \cdot pQ \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)}$$

mit $\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC$, $Q \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}$, $\frac{1}{Q} \cdot \Omega = \omega \cdot RC$, worin $Q \approx k = \sqrt{\frac{L}{C}}$ und $p = qQ$.

Es ist $p \sim k$, da zunehmendes k bei gleichbleibendem C und L bedeutet, dass R kleiner wird und mithin p grösser. Es ist $p = q \cdot Q$.

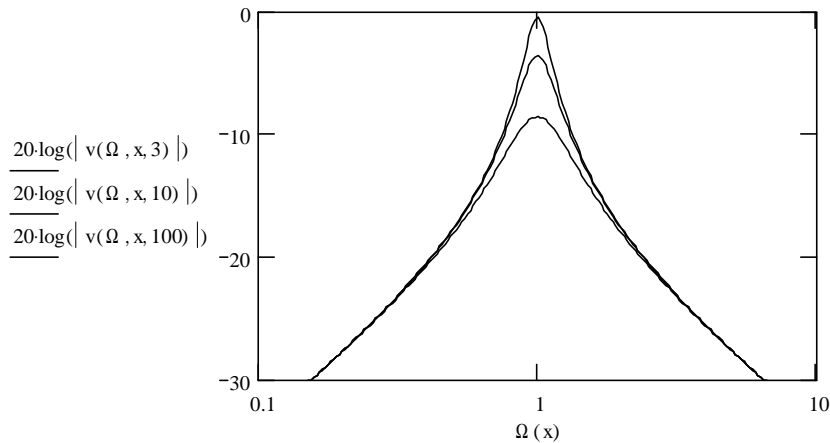


Fig. 2-31 Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelkreis und $Q_P \approx k > 10$

Gesucht werden die 3 dB – Punkte, die Bandbreite $B_{Zweitor}$ und die Güte $Q_{Zweitor}$ des

Zweitores $v(\Omega) = \frac{u_{a \text{ Schalter zu}}}{u_{a \text{ Schalter offen}}} = \frac{u_{az}}{u_{ao}}$ mit v_{Max} bei $\Omega_P = 1$ (für $k > 10$).

Aus dem Ansatz $v(\Omega) = \frac{u_{a \text{ Schalter zu}}}{u_{a \text{ Schalter offen}}} = \frac{u_{az}}{u_{ao}} = \frac{2Q^2}{2Q^2 + p} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ werden

$$B_{Zweitor} = \frac{2Q^2 + p}{pQ} \quad \text{und} \quad Q_{Zweitor} = \frac{\Omega_0}{B} = \frac{pQ}{2Q^2 + p} \quad (2-29)$$

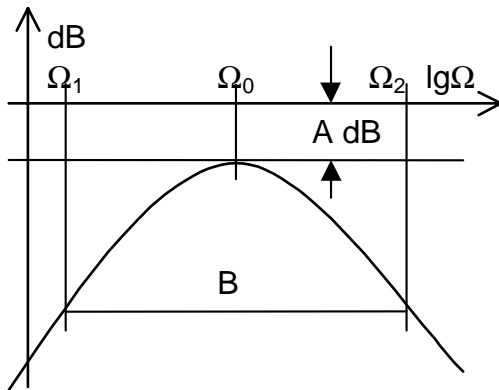
Die Eckfrequenzen ergeben sich aus dem Formelsatz

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + 4Q^2} - 1}{2Q} & \Omega_2 &= \Omega_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + 4Q^2} + 1}{2Q} \\ \Omega_1 &= \frac{\sqrt{B^2 + 4\Omega_0^2} - B}{2} & \Omega_2 &= \frac{\sqrt{B^2 + 4\Omega_0^2} + B}{2} \end{aligned} \quad (2-30)$$

Der Formelsatz (6-44) gilt nur, wenn Ω_1 und Ω_2 logarithmisch symmetrisch zu Ω_0 liegen.

2.2.3 Durchlassfilter und Einfügungsdämpfung

Durchlassfilter (Bandpass) erreichen bei ihrer Mittenfrequenz Ω_0 den 0 dB Wert nicht. Es zeigt sich an dieser Stelle eine Dämpfung, die Einfügungsdämpfung.



Es sei $U = \frac{Q_U}{Q_L}$. Aus der Sicht des einge-

setzten Eintores, zum Beispiel des Parallelkreises aus 2.2.2.2, ist ein unbelastetes $Q = Q_U$ gegeben, das durch die Beschaltung nach Fig. 2-29 belastet wird, so dass das Zweitor ein tieferes $Q = Q_L$ aufweist.

Mit $a = 10^{\frac{|A|}{20}}$ und (6-43) lassen sich folgende Zusammenhänge finden:

$$U = \frac{Q_U}{Q_L} = \frac{2Q_U^2 + p}{p} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} = \frac{2Q_U^2}{2Q_U^2 + p} = \frac{pU - p}{pU} = \frac{U - 1}{U}$$

Zusammengestellt werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{U - 1}{U} & a &= \frac{U}{U - 1} \\ U &= \frac{a}{a - 1} = \frac{Q_U}{Q_L} \end{aligned} \quad (2-31)$$

Beispiel:

Gegeben ist aus einer Messung $A = -0.4 \text{ dBm}$ und $Q_L = 25$

Daraus werden ¹² $a^2 = 1,0965$, $a = 1,047$ und $Q_U = 555,46$

Ist das Zweitor ein Parallelkreis mit $R_i = R_L = pR = 50 \Omega$, werden $p = 29'082,14$ und $R = 1,719 \text{ m}\Omega$. Gemeint ist R in Serie zu L . Nach der Wandlung zu R parallel L wird $R_p = Q_U^2 R = 530,37 \Omega$.

Die Mittenfrequenz sei $f_0 = 455 \text{ kHz}$. Bestimmen Sie L und C .

($C = 366,34 \text{ nF}$, $L = 334 \text{ nH}$)

¹² $20\lg(a^{-1}) = 10\lg(a^{-2})$. A in dBm gibt eine Einfügungsdämpfung als Leistungsverhältnis an.

2.2.4 Weitere Zweitor – Schaltungen

2.2.4.1 Durchlassfilter mit realem Parallel - Kreis

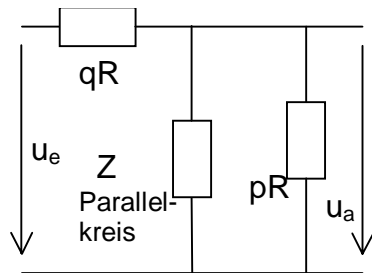


Fig. 2-32 Bandpass mit Parallelkreis

In der nebenstehenden Anordnung werde die Impedanz Z eines Parallel – Kreises parallel zum Lastwiderstand pR eines Spannungsteilers gelegt.

Untersucht wird das Verhältnis

$$v(\Omega) = \frac{u_a}{u_e}$$

Aus 2.1.4 entnehmen wir für Z:

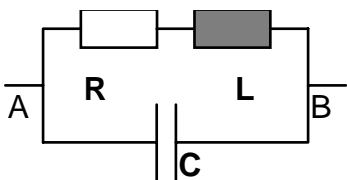


Fig. 2-33 Parallelschwingkreis

Für den realen Parallel - Schwingkreis gilt:

$$Z = R \cdot k \cdot \frac{1 + j \cdot k\Omega}{k \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega}$$

und daraus wird

$$v(\Omega) = \frac{p(1 + j \cdot k\Omega)}{[pq(1 - \Omega^2) + (p + q)] + j \cdot \left[\frac{pq}{k} + k(p + q) \right] \cdot \Omega} \tag{2-32}$$

weiterhin mit $\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC$, $k \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}$, $\frac{1}{k} \cdot \Omega = \omega \cdot RC$, worin $k = \sqrt{\frac{L}{C}}$

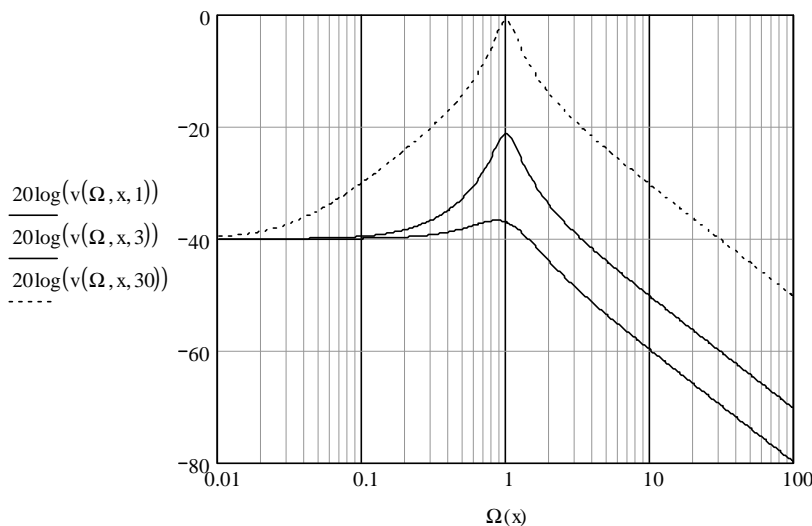


Fig. 2-34 Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelschwingkreis

2.2.4.2 Durchlassfilter mit Parallel – Kreis und $k \gg 1$, das heisst $k > 3$, (10)

In 2.1.5 ist ausgeführt, dass für hohe k – Werte ($k > 10$) der reale Parallel – Kreis aufgefasst werden darf als Parallelschaltung von Q^2R , L und C .

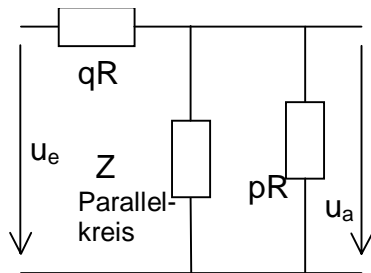


Fig. 2-35 Bandpass mit Parallelkreis. $k \gg 1$

In der nebenstehenden Anordnung werde die Impedanz Z eines Parallel – Kreises parallel zum Lastwiderstand pR eines Spannungsteilers gelegt.

Untersucht wird das Verhältnis

$$v(\Omega) = \frac{u_a}{u_e}$$

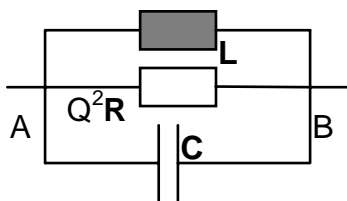


Fig. 2-36 Parallelschwingkreis mit $k > 10$

Für den realen Parallel - Schwingkreis gilt:

$$Z = R \cdot \frac{j \cdot Q^2 \Omega}{Q \cdot (1 - \Omega^2) + j \cdot \Omega}$$

und daraus wird

$$v(\Omega) = \frac{j \cdot pQ \cdot \Omega}{pq \cdot [1 - \Omega^2] + j \cdot (p + q)Q \cdot \Omega} \tag{2-33}$$

mit $\Omega^2 = \omega^2 \cdot LC$, $Q \cdot \Omega = \omega \frac{L}{R}$, $\frac{1}{Q} \cdot \Omega = \omega \cdot RC$, worin $Q \approx k = \sqrt{\frac{L}{C}}$ und $p = qQ$.

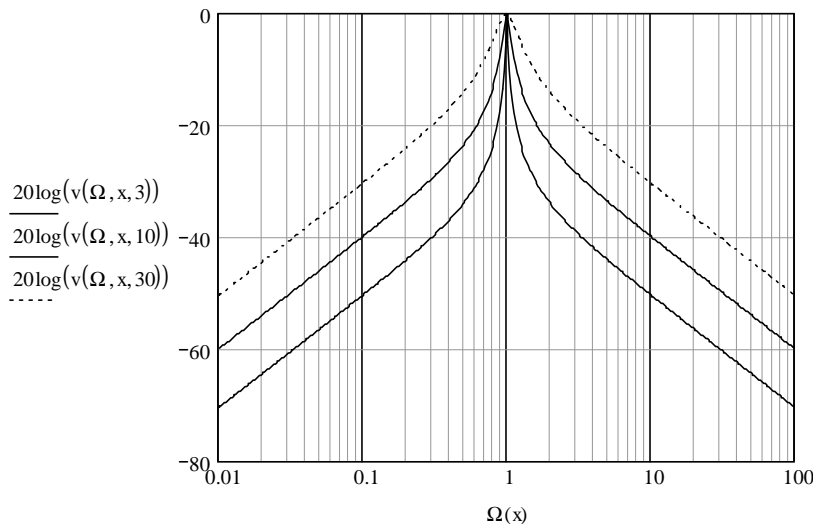


Fig. 2-37 Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelkreis und $Q_p \approx k > 10$

2.3 Verzeichnisse

2.3.1 Literaturverzeichnis und Software

L 2-1	Frohne Heinrich, Löcherer Karl-Heinz und Müller Hans, Grundlagen der Elektrotechnik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1996, ISBN 3-519-46400-4.
L 2-2	Gren Joachim und Krause Joachim, Metzler Physik, Verlag Schroedel, Hannover, 1998, ISBN 3-507-10700-7.
L 2-3	MATHCAD® 2000. Mathematiksoftware.
L 2-4	Tabellenbuch Informations- und Telekommunikationstechnik, Verlag Dr. Max Gehlen, Bad Homburg vor der Höhe, 1998, ISBN 3-441-92102-x

2.3.2 Figurenverzeichnis

Fig. 2-1	Idealer Serie - Kreis	3
Fig. 2-2	Phasengang des idealen Serie Kreises.....	3
Fig. 2-3	Idealer Parallel - Schwingkreis	3
Fig. 2-4	Phasengang des idealen Parallel Kreises	4
Fig. 2-5	Realer Serie - Kreis	4
Fig. 2-6	Impedanzverhalten mit $z = Z_{AB}/R$ und $Q_S = 0,1, 1, 10$ und 100	5
Fig. 2-7	Winkelverhalten in rad mit $Q_S = 0,1, 1, 10$ und 100	6
Fig. 2-8	Impedanzverhalten mit $z = Z_{AB}/R$ und $k = 0,1, 1, 10$ und 100	7
Fig. 2-9	Winkelverhalten in rad mit $k = 0,1, 1, 10$ und 100	9
Fig. 2-10	Ortskurve mit $k < 2$	9
Fig. 2-11	Fehler der normierten Kreisfrequenz in Abhängigkeit von k	10
Fig. 2-12	Fehler des maximalen Impedanzwertes, abhängig von k	11
Fig. 2-13	Fehler der Güte, abhängig von k	11
Fig. 2-14	Realer Parallel - Kreis.....	12
Fig. 2-15	Realer Parallelkreis, gewandelt	12
Fig. 2-16	Realer Serie - Kreis	13
Fig. 2-17	Realer Parallel - Kreis.....	13
Fig. 2-18	R – C Serie - Parallelwandlung.....	14
Fig. 2-19	R – L Serie - Parallelwandlung	14
Fig. 2-20	Bandpass	15
Fig. 2-21	Bandpass mit hoher Güte	15
Fig. 2-22	Tiefpass - Filter	15
Fig. 2-23	Amplitudengang zu Tiefpass vierpolig.....	16
Fig. 2-24	Ortskurve zu Tiefpass vierpolig	16
Fig. 2-25	Bandpass unter Anpassung.....	17
Fig. 2-26	Parallelschwingkreis	17
Fig. 2-27	Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelschwingkreis.....	17
Fig. 2-28	Ortskurve zu Durchlassfilter mit realem Parallelschwingkreis	18
Fig. 2-29	Bandpass unter Anpassung.....	18
Fig. 2-30	Parallelschwingkreis mit $k > 10$	18
Fig. 2-31	Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelkreis und $Q_P \approx k > 10$.	19
Fig. 2-32	Bandpass mit Parallelkreis	21
Fig. 2-33	Parallelschwingkreis	21
Fig. 2-34	Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelschwingkreis.....	21
Fig. 2-35	Bandpass mit Parallelkreis. $k \gg 1$	22
Fig. 2-36	Parallelschwingkreis mit $k > 10$	22
Fig. 2-37	Amplitudenverhalten zu Durchlassfilter mit realem Parallelkreis und $Q_P \approx k > 10$.	22

2.3.3 Stichwortverzeichnis

Einfügungsdämpfung.....	20	Saugkreis.....	5
Eintore		Schwingkreis.....	3
mit L-C Kombinationen.....	3	idealer.....	3
Güte		realer.....	4
Parallelkreis.....	7	Schwingungsformel.....	3
Seriekreis.....	5	Serie-Parallelwandlung.....	14
idealer		Spannungsüberhöhung.....	13
Parallelkreis.....	3	Stromüberhöhung.....	13
Seriekreis.....	3	Überhöhung	
Kreisgüte.....	5	Spannung.....	13
Parallel-Seriewandlung.....	14	Strom.....	13
realer		Verstimmung.....	6
Parallelkreiskreis.....	6	Zweitore	
Seriekreis.....	4	mit belastetem Ausgang.....	17
Resonanz.....	4	mit L-C Kombinationen.....	15
Resonanzfrequenz.....	4	mit unbelastetem Ausgang.....	15