Berner Fachhochschule BFH
Hochschule für Technik und Informatik HTI
Fachbereich Elektro- und Kommunikationstechnik EKT

Elektrotechnik Grundlagen

Kurs 2

Kapitel 3

Weitere Schaltungen mit
R, L und C für sinusförmige Signale

2005
Kurt Steudler

(\Modul_ET2_Kap_03.doc)

Inhaltsverzeichnis

3 Weitere Schaltungen mit R, L und C für sinusförmige Signale

3.1 Erzeugung elektrischer Energie

Elektrische Energie wird zum grössten Teil aus Maschinen mit umlaufenden Teilen (Generatoren) gewonnen. [1, 2]

3.1.1 Drehstrom

Wird ein bewegter Leiter einem magnetischen Feld mit der Induktion B ausgesetzt, induziert sich in diesem Leiter eine Spannung u(t). [3]
Diese Tatsache (Induktionsgesetz) wird zur Energieerzeugung genutzt. Ein Dreiphasennetz ergibt sich aus drei einem Induktionsfeld ausgesetzten Leiterschlaufen.
Sind diese Leiterschlaufen zueinander um je 120 Grad versetzt entsteht das in Europa übliche Drehstromnetz.

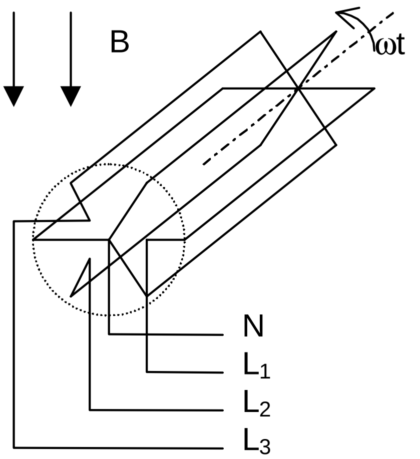


Fig. 3-1 Generator im Drehstromsystem

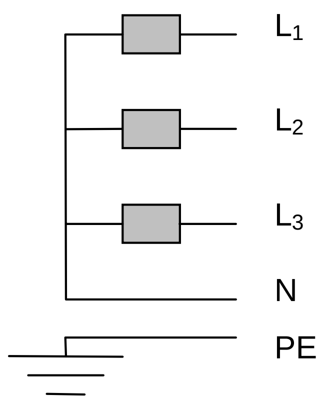


Fig. 3-2 Drehstromsystem

Vom Generator führen drei Aussenleiter (Phasenleiter) L_1, L_2 und L_3 weg. Die Spannung eines Aussenleiters zum Neutralleiter N (hellblau) heisst Phasenspannung (Live) und beträgt in Europa 230 V_{eff}.
PE ist der Schutzleiter (gelbgrün). Er liegt auf Erdpotential.

Die Spannung zwischen den drei Aussenleitern L_1, L_2 und L_3, nämlich je $L_1 - L_2$, $L_2 - L_3$ und $L_3 - L_1$ heisst Aussenleiterspannung. Sie beträgt 400 V_{eff}.

---

1 Die Grundlagen zum Generator finden sich im Kapitel 86

2 Die indirekte Umwandlung in elektrische Energie mit Generatoren geschieht aus Primärenergien wie Oel, Kohle, Kernbrennstoffe, Wasser.
Bekannt aber noch wenig verbreitet ist die direkte Umwandlung: elektrochemische Stromerzeuger (galvanische Elemente, Akkumulatoren), Thermospannung und Photovoltaik (Halbleiterelemente).

3 Im europäischen Netz beträgt die Netzfrequenz f = 50 Hz.

Zwischen der Aussenleiterspannung und der Phasenspannung herrscht folgende Beziehung:

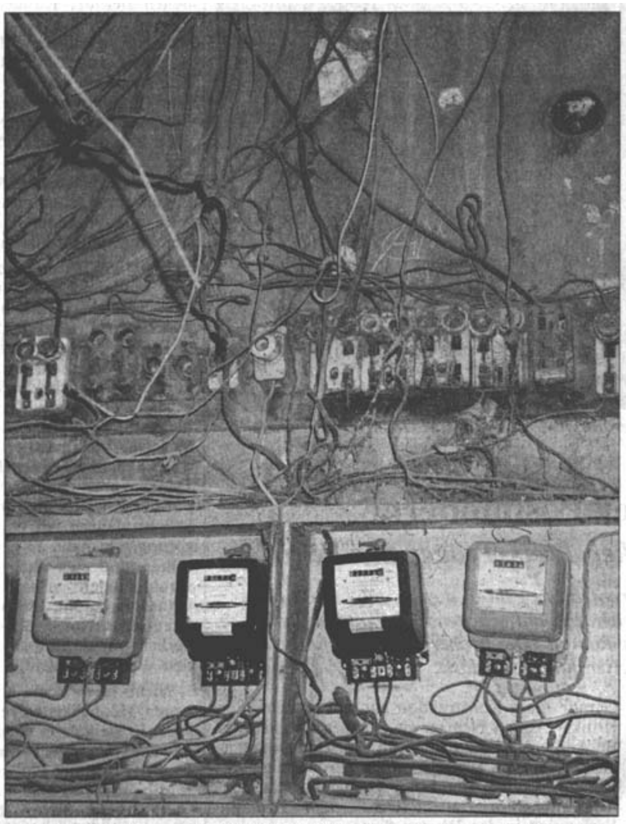
$$\text{Aussenleiterspannung} = \sqrt{3} \cdot \text{Phasenspannung}$$

Für die nachfolgenden Betrachtungen darf das Niederspannungsnetz als ideale Quelle angenommen werden.

3.1.2 Netze

Wir unterscheiden Netze mit:

- Kleinspannung: Betriebsspannung bis 50 V (Gleichspannung oder Wechselspannungseffektivwert)
- Niederspannung: Betriebsspannung über 50 V und bis 1000 V (Gleichspannung oder Wechselspannungseffektivwert)
- Hochspannung: Betriebsspannung über 1000 V. Unterteilt ergeben sich die Mittelspannung von 1 kV bis 50 kV, die Hochspannung von 50 kV bis 150 kV, die Höchstspannung von 150 kV bis 380 kV und die Ultrahochspannung über 380 kV (bis 1500 kV).



Real-Installation: Netzwerk in einem Haus in Havanna. (Bild mfr.)

3.2 Strom Spannung und Leistung

Ausgemessen wird ein beliebiges Eintor mit der Impedanz Z:

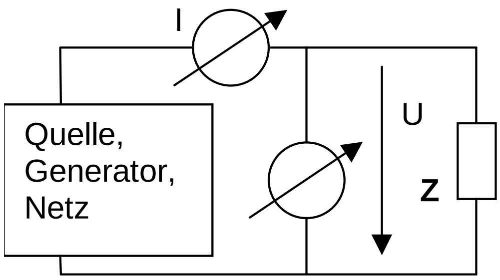


Fig. 3-3 Leistungsmessung an einem Eintor

3.2.1 Begriffe zur Leistung an einer komplexen Last

Die Impedanz Z = a+ j·b stellt eine kapazitive oder induktive Last dar. [4] Zwischen dem Strom I und der Spannung U ist eine Phasenverschiebung φ vorhanden. [5]

In der Impedanz Z fällt die **Scheinleistung** S an mit [6]

$$S = I^2 \cdot Z = I^2 \cdot a + j \cdot I^2 \cdot b = P + j \cdot Q \quad (3\text{-}1)$$ [7]

Die Scheinleistung S ist eine komplexe Zahl. [8] Der Realteil P stellt die **Wirkleistung** dar. Der Imaginärteil Q wird **Blindleistung** genannt. [9]

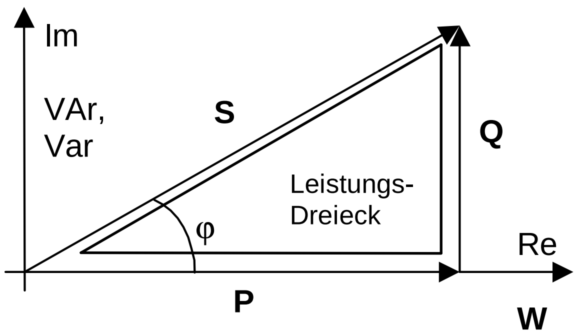


Fig. 3-4 Leistungsdreieck

[4] Die Lasten im Niederspannungsnetz sind oft (meist) induktiv (Motoren, Transformatoren und so weiter).

[5] Die Quelle liefert ein sinusförmiges Signal. Die grossen Buchstaben U und I bedeuten hier Effektivwerte.

[6] In der Elektrotechnik wird als Bezugsgrösse der Strom I [bzw. i(t)] verwendet.

[7] [S] = VA, [P] = W, [Q] = VAr (VoltAmpère reaktiv).

[8] Die Scheinleistung S ist jene Leistung, die vom Stromerzeuger (EW) aufgebracht werden muss.

[9] Die Blindleistung ist nicht nutzbar (sie ist „blind“).

3.2.2 Zeitverhalten der Leistung

Es seien $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t - \varphi)$ und $i(t) = \hat{I} \sin \omega t$

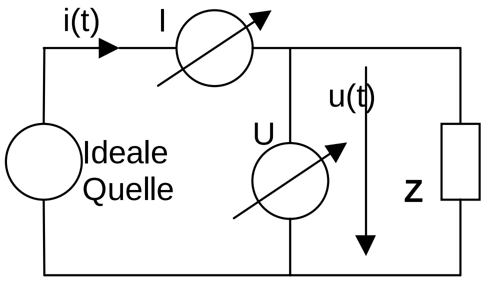


Fig. 3-5 Messanordnung zum Zeitverhalten

Für die Leistung gilt [10]

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

und daraus

$$p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \cos \varphi - \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t - \varphi) \tag{3-2}$$

Die momentane Leistungsaufnahme der Lastimpedanz (Eintor) schwankt sinusförmig mit der Kreisfrequenz 2ω (doppelte Netzfrequenz) um den Mittelwert P = $U \cdot I \cdot \cos\varphi$, dies mit der Amplitude $\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U \cdot I$.

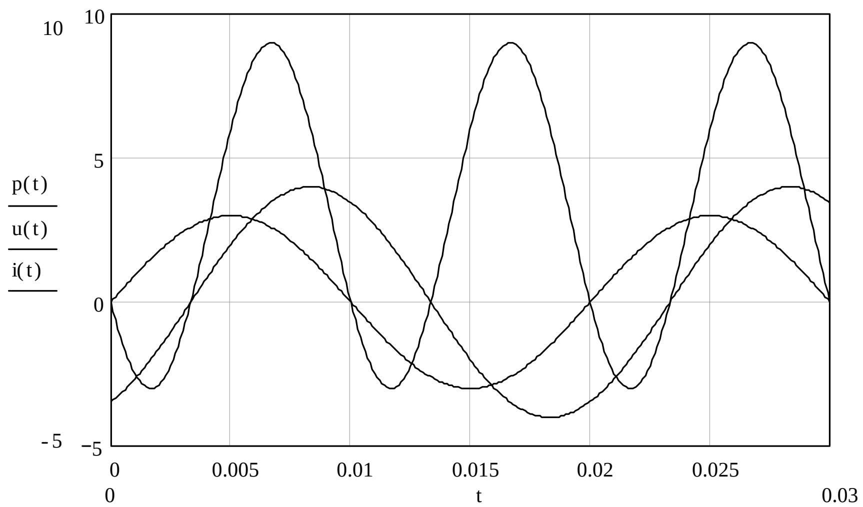


Fig. 3-6 Zeitverhalten der Leistung

[10] Es ist zu beachten, dass mit einem Voltmeter und einem Ampèremeter die Wirkleistung bei einem Verbraucher nicht gemessen werden kann. Die Anordnung miss die Scheinleistung S.

3.3 Kompensation der Blindleistung

3.3.1 Ziel der Kompensation

Wird ein Eintor mit sinusförmigem Signal gespeist, muss der speisende Generator die Scheinleistung **S** aufbringen. Dabei ist die Scheinleistung in ihrem Betrag stets $|\mathbf{S}| \geq \mathbf{P}$ der reellen Wirkleistung.
Für $\varphi = 0$ wird **S** = **P**, für $\varphi \neq 0$ wird $|\mathbf{S}| > \mathbf{P}$; dabei kann die zugehörige Blindleistung **Q** mit einem positiven oder einem negativen Vorzeichen versehen sein. [Das Vorzeichen ergibt sich nach DIN beziehungsweise DIN-EN 40110 aus dem Bezugszeiger **i** (Strom)].
Ist **Q** > 0 ($\varphi > 0$), sprechen wir von einer Induktiv **-** Last. Das Eintor wirkt induktiv.
Mit **Q** < 0 ($\varphi < 0$), liegt eine Kapazitiv **-** Last vor. Das Eintor wirkt kapazitiv.
Im Bereich der Energieversorgung (Starkstromtechnik) sind praktisch alle Lasten induktiv (Motoren, Transformatoren und so weiter).

In einem Energie - Verteilnetz mit konstanter Spannung U wird bei $\varphi \neq 0$ ein grösserer Strom I fliessen, als das für die zu erzeugende Wirkung nötig wäre.
Am Ort der Last wird nur **P** als reelle Grösse wirksam (Leistung an einer Motorwelle, umgesetzte Leistung in einem Transformator und so weiter).
Mit zunehmendem $\varphi \neq 0$ muss das Leitungsnetz zunehmende Drahtquerschnitte aufweisen, um eine vorgegebene Stromdichte J nicht zu überschreiten. Die so verursachten Mehrkosten lassen sich vermeiden, wenn die Blindleistung **Q** auf ein erträgliches Mass reduziert oder kompensiert wird.

3.3.2 Vorgehen zur Kompensation

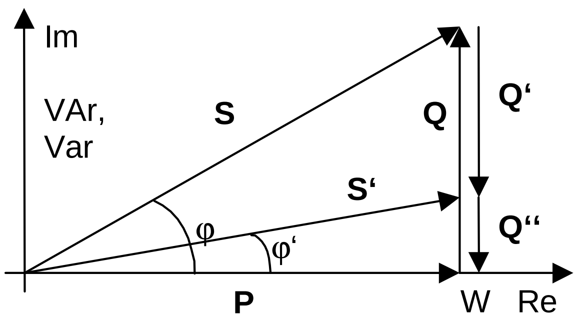


Fig. 3-7 Wirkung der Kompensation im Leistungsdreieck

Induktive Blindleistung $\mathbf{Q}_L$ lässt sich ganz oder teilweise wegschaffen oder kompensieren mit einer zusätzlichen kapazitiven Blindlast $\mathbf{Q}_C$.
Wird zum Zeiger $\mathbf{S} = \mathbf{P} + j\cdot\mathbf{Q}_L$ der Zeiger $- j\cdot\mathbf{Q}_C$ addiert, ergibt sich gegenüber der Quelle eine Reduktion der Scheinleistung auf **S'**, beziehungsweise eine Reduktion von **Q** auf $\mathbf{Q''} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_C$ (Q – Q'), worin $\mathbf{Q}_C = U^2\omega C$.

Je nach Grösse und Vorzeichen von **Q'** unterscheiden wir drei Fälle:

$\mathbf{Q'} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_C > 0$ wird als „unvollständige Kompensation“ bezeichnet,

$\mathbf{Q'} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_C = 0$ nennen wir eine „vollständige Kompensation“ und

$\mathbf{Q'} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_C < 0$ ist eine „Überkompensation“.

Der Zusammenhang zwischen **P**, **Q** und **S** ergibt sich über den Winkel φ zwischen P und S (u und i). Es gelten:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\cdot\sin\varphi\ ,\quad \mathbf{P} = \mathbf{S}\cdot\cos\varphi \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}\cdot\tan\varphi \tag{3-3}$$

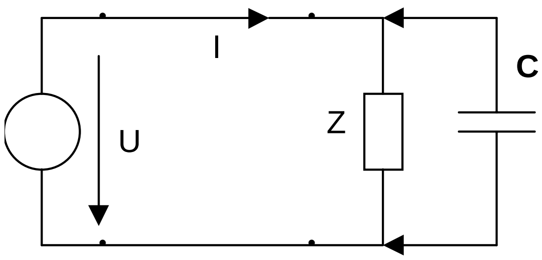


Fig. 3-8 Beschaltung zur Kompensation

In der Energietechnik wird üblicherweise der zu einer bestimmten Anlage gehörende Winkel als **cosφ** angegeben. Der Wert **cosφ** = P/S heisst **Leistungsfaktor**.
Q/S = sinφ wird Blindfaktor genannt.

3.3.3 Bestimmen der Kompensation

Für eine vollständige Kompensation gilt

$Q_C = Q = S\cdot\sin\varphi = P\cdot\tan\varphi$ und damit für C (Fig. 3-7)

$$C = \frac{Q}{U^2 \cdot 2\pi f} \tag{3-4}$$

Für eine unvollständige Kompensation wird

$Q_C = Q' = Q - Q''$ mit $Q'' = P\cdot\tan\varphi'$ und damit für C (Fig. 3-7)

$$C = \frac{Q}{U^2 \cdot 2\pi f} \cdot \left[\frac{\tan\varphi - \tan\varphi'}{\tan\varphi}\right] = \frac{P}{U^2 \cdot 2\pi f} \cdot \left[\tan\varphi - \tan\varphi'\right] \tag{3-5}$$

Beweisen Sie die vorangehende Formel.

Aufgabe

Eine Maschine mit der Anschrift 200 MVA, cosφ = 0,8 weist eine Wirkleistung von P = 160 MW auf und nimmt 120 MVAr Blindleistung auf. Bei einer vollständigen Kompensation in einem 66 kV/50Hz-Netz kann mit $C = Q_C/U^2\omega = 87{,}7\ \mu F$ der aufgenommene Strom von 3 kA auf 2,4 kA reduziert werden. Wieviele Prozent Kupferquerschnitt lassen sich so einsparen ?

3.4 Leistungsanpassung

3.4.1 Leistungsanpassung einer komplexen Last

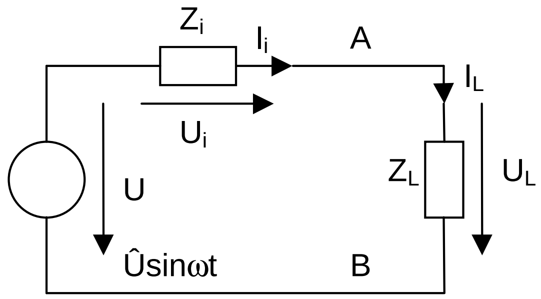


Fig. 3-9 Komplexe Last

Die Anordnung zeigt eine reale Quelle mit einer komplexen Innenimpedanz Z_i.
$Z_i = R_i + j \cdot X_i$.
Die Last sei ebenfalls komplex mit $Z_L = R_L + j \cdot X_L$.

Welche Bedingungen müssen für die Lastimpedanz Z_L erfüllt sein, damit sie eine maximale **Wirkleistung** P_L aufnimmt ?, damit Leistungsanpassung herrscht ?

3.4.2 Bedingungen für die Lastimpedanz

Die Scheinleistung an der Last wird

$$S = I_L^2 \cdot Z_L = \frac{U^2}{\left|Z_i + Z_L\right|^2} \cdot R_L + j \cdot \frac{U^2}{\left|Z_i + Z_L\right|^2} \cdot X_L \qquad (3\text{-}6)$$

Daraus ergibt sich die Wirkleistung zu

$$P_L = \frac{U^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} \cdot R_L \qquad (3\text{-}7)$$

Aus der Bestimmungsgleichung

$$\Delta P_L = \frac{\partial P_L}{\partial R_L} \cdot dR_L + \frac{\partial P_L}{\partial X_L} \cdot dX_L \qquad (3\text{-}8)$$

ergeben sich die Bedingungen für die maximale Wirkleistungsaufnahme der Last-impedanz Z_L

einerseits

$$R_L = R_i$$

und $X_L = -X_i$ (3-9)

oder andererseits

$$Z_L = Z_i^* \qquad Z_L^* = Z_i$$

3.5 Entkoppelte Netzwerke

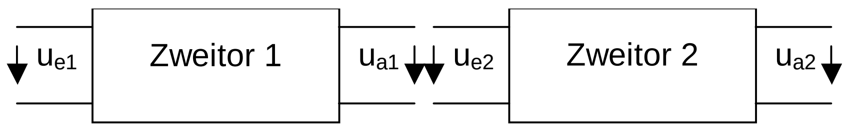


Fig. 3-10 Entkoppelte Netzwerke

Zwei Netzwerke (Zweitore) gelten als entkoppelt, wenn das zweite Zweitor 2 das erste Zweitor 1 kaum (oder nicht) belastet.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Eingangsimpedanz Z_{2IN} des Zweitors 2 sehr gross ist gegenüber der Ausgangsimpedanz Z_{1OUT} des Zweitors 1. [11]

$$Z_{IN2} >> Z_{OUT1} \qquad (3\text{-}10)$$

Für entkoppelte Netzwerke gilt

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{u_{a2}}{u_{e1}} = \frac{u_{a1}}{u_{e1}} \cdot \frac{u_{a2}}{u_{e2}} \qquad (3\text{-}11)$$

Im dB – Mass addieren sich die Amplitudengänge

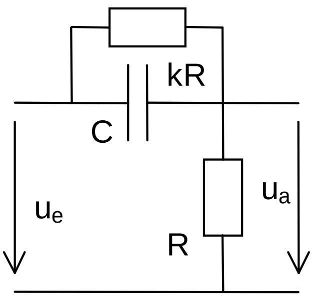
$$20 \cdot \lg\left|\frac{u_a}{u_e}\right| = 20\lg\left|\frac{u_{a1}}{u_{e1}}\right| + 20 \cdot \lg\left|\frac{u_{a2}}{u_{e2}}\right| \qquad (3\text{-}12)$$

[11] Als „sehr viel grösser“ gilt in der technischen Praxis der Faktor 10 oder mehr (besser 100).

3.6 Normieren auf vorgegebene Frequenz

Bei verschiedenen Anwendungen besteht der Wunsch, die normierte Kreisfrequenz für eine bestimmte Bedingung auf dem Wert 1 zu halten. Zum Beispiel soll Ω = 1 sein für eine Eckfrequenz oder eine bestimmte Winkelbedingung.

Anwendung:



Mit der Normierung $\Omega_N = \omega RC$ wird

$$v(\Omega_N) = \frac{u_a}{u_e}(\Omega_N) = \frac{1 + j\cdot k\omega RC}{1 + k + j\cdot k\omega RC} = \frac{1 + j\cdot k\Omega_N}{1 + k + j\cdot k\Omega_N}$$

Der untere 3 dB – Punkt (die untere Eckfrequenz) stellt sich ein bei $\Omega_{N1} = \frac{1+k}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+k)^2 - 2}}$

Die obere Eckfrequenz wird $\Omega_{N2} = \frac{1}{k}\cdot\sqrt{(1+k)^2 - 2}$

Fig. 3-11 Hochpass mit Anfangsdämpfung

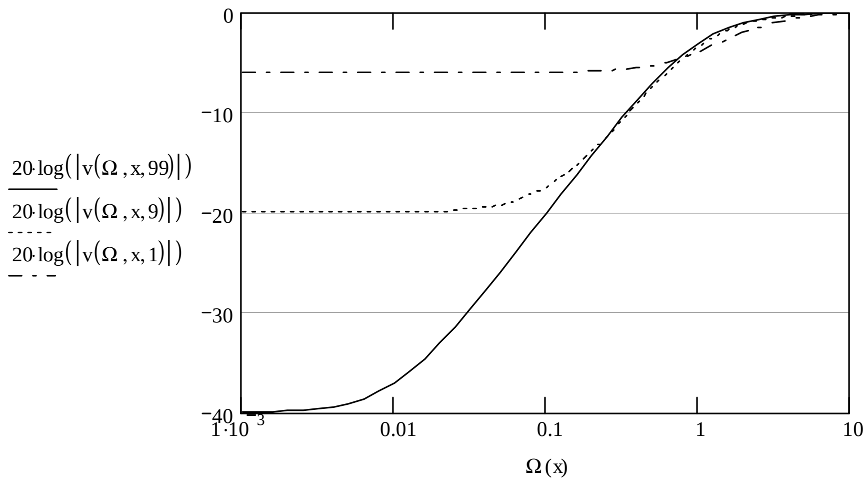


Fig. 3-12 Amplitudengang

3.6.1 Normieren auf eine Grenzfrequenz

Es besteht der Wunsch, die obere Eckfrequenz für alle k auf dem Wert Ω = 1 zu halten, das heisst es soll Ω_2 = 1 sein.
Die angewendete Normierung ist um den Faktor aus Ω_{N2} zu verändern, das heisst es gilt für die Normierung Ω neu $\frac{\Omega_N}{\Omega_{3dB}}\cdot\Omega_{3dB} = \Omega\cdot\Omega_{3dB}$ worin

$$\Omega = \frac{\Omega_N}{\Omega_{3dB}} = \frac{\Omega_N}{\Omega_{N2}} = \frac{\omega RC}{\frac{1}{k}\cdot\sqrt{(1+k)^2 - 2}}.$$

Damit wird neu

$$v(\Omega) = \frac{u_a}{u_e}(\Omega) = \frac{1 + j \cdot k\omega RC}{1 + k + j \cdot k\omega RC}$$

mit den Eckfrequenzen

$$= \frac{1 + j \cdot k \cdot \Omega_N \Omega_{3dB}}{1 + k + j \cdot k \cdot \Omega_N \Omega_{3dB}}$$

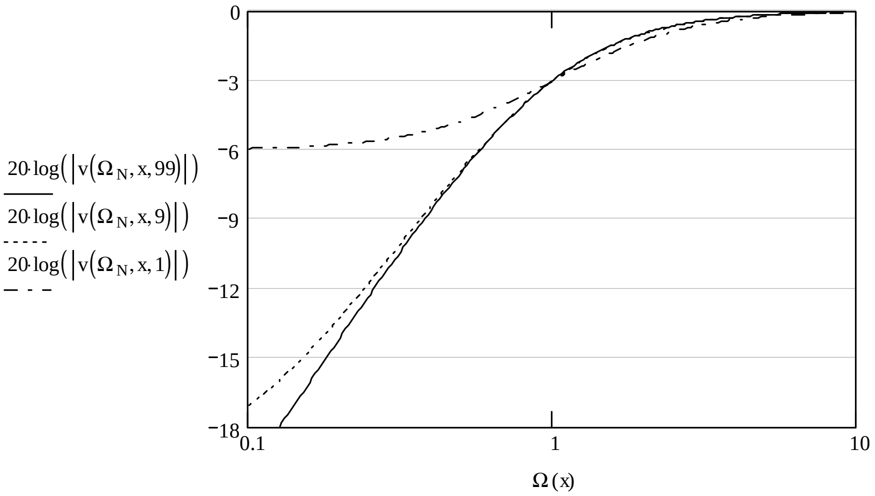
$\Omega_2 = 1$ und

$$= \frac{1 + j \cdot \Omega \cdot \sqrt{(1+k)^2 - 2}}{1 + k + j \cdot \Omega \cdot \sqrt{(1+k)^2 - 2}}$$

$$\Omega_1 = \frac{(1+k)^2 - 2}{1+k}$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage stimmt. Bei welchen Frequenzen liegt neu der Winkel auf $\varphi = \pi/4$?

$$v(\Omega, x, k) := \frac{1 + j \cdot k \cdot \Omega(x) \cdot \Omega_{3dB}(k)}{(1 + k) + j \cdot k \cdot \Omega(x) \cdot \Omega_{3dB}(k)} \qquad \Omega_{3dB}(k) := \frac{1}{k} \cdot \sqrt{(1 + k)^2 - 2}$$



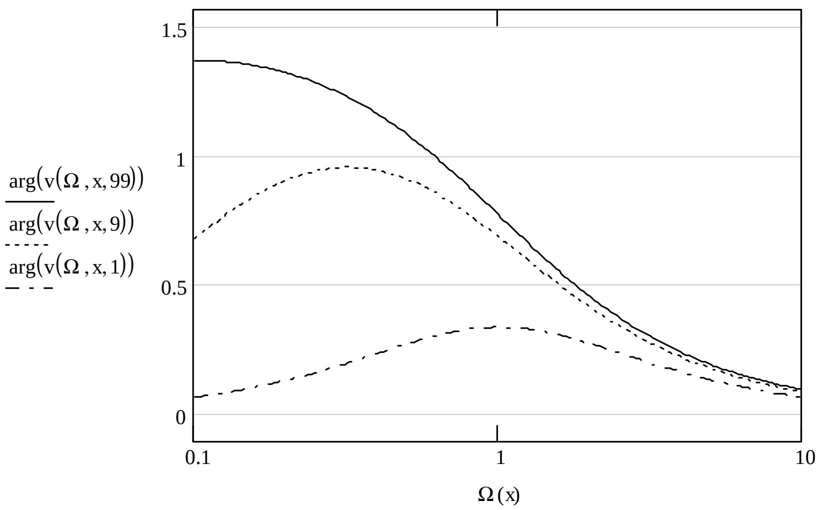


Fig. 3-13 Amplituden- und Phasengang mit verschoben normierter oberer Eckfrequenz

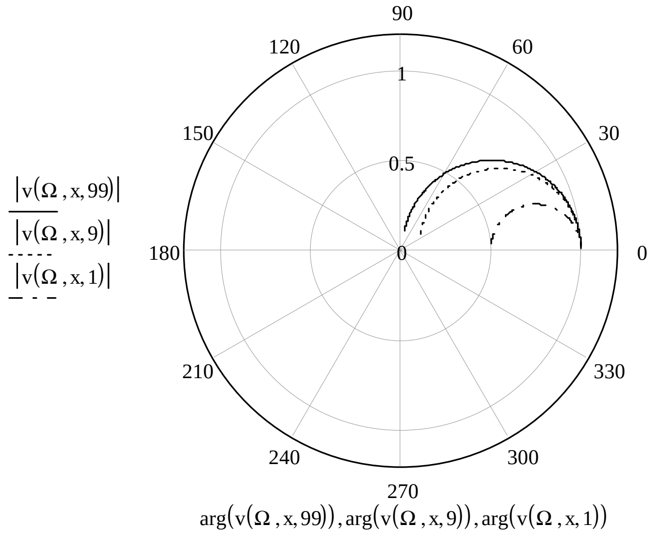


Fig. 3-14 Ortskurve mit verschoben normierter oberer Eckfrequenz

3.6.2 Normieren auf ein Winkelextremum

Es besteht der Wunsch, das Maximum des Winkels (der Phase) φ für alle k auf dem Wert $\Omega = 1$ zu halten, das heisst es soll $\Omega_0 = 1$ sein.
Die angewendete Normierung ist um den Faktor aus Ω_{N0} zu verändern, das heisst es gilt für die Normierung Ω neu $\frac{\Omega_N}{\Omega_{Max}} \cdot \Omega_{Max} = \Omega \cdot \Omega_{Max}$ worin

$$\Omega = \frac{\Omega_N}{\Omega_{3Max}} = \frac{\Omega_N}{\Omega_{N0}} = \frac{\omega RC}{\frac{1}{k} \cdot \sqrt{1+k}}.$$

Damit wird neu

$$v(\Omega) = \frac{u_a}{u_e}(\Omega) = \frac{1 + j \cdot k\omega RC}{1 + k + j \cdot k\omega RC}$$

$$= \frac{1 + j \cdot k \cdot \Omega_N \Omega_{Max}}{1 + k + j \cdot k \cdot \Omega_N \Omega_{Max}}$$

$$= \frac{1 + j \cdot \Omega \cdot \sqrt{1+k}}{1 + k + j \cdot \Omega \cdot \sqrt{1+k}}$$

mit den Frequenzen

$\Omega_0 = 1$ und

$$\Omega_{\frac{\pi}{4}} = \frac{k\sqrt{1+k} \pm \sqrt{(1+k)(k^2 - 4k - 4)}}{2 \cdot (1+k)}$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage stimmt. Bei welchen Frequenzen stellen sich nun die Eckfrequenzen (3dB - Orte) ein ?

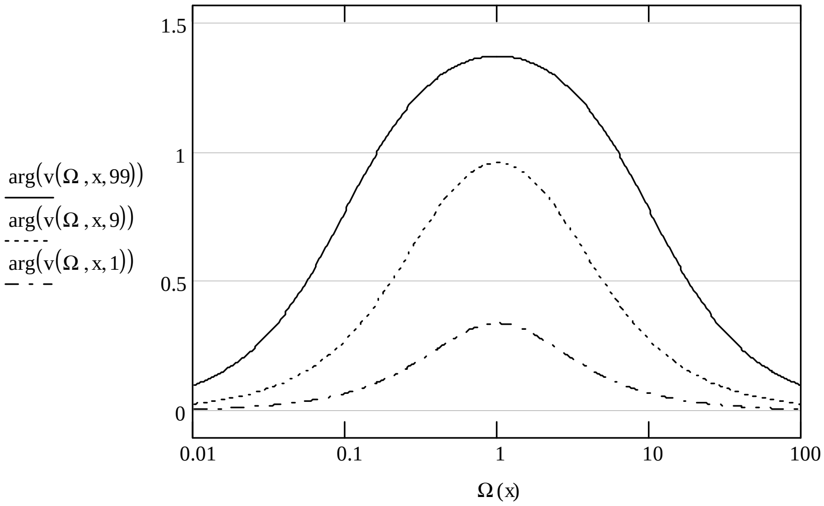


Fig. 3-15 Winkel in rad bei verschobener normierter Frequenz auf Extremum

3.7 Analoge Filter mit passiven Elementen

Mit den passiven Bauelementen R, L und C lassen sich Filter bauen, die unterschiedlichen Anforderungen genügen.
Wir unterscheiden Filter mit Butterworth, Tschebyscheff oder Bessel Charakter.

Butterworth Filter zeichnen sich durch einen Amplitudengang aus, der im Durchlassbereich bis zur Grenzfrequenz [12] möglichst horizontal verläuft.
Tschebyscheff Filter lassen vorgegebene Spannungsüberhöhungen mit konstanter Amplitude (Welligkeit) zu. Die Filter zeichnen sich durch eine hohe Steilheit auf die Grenzfrequenz hin aus und werden mit zunehmender Welligkeit steiler.
Bessel Filter sind bezüglich der Gruppenlaufzeit optimiert (vgl. 3.7.3).

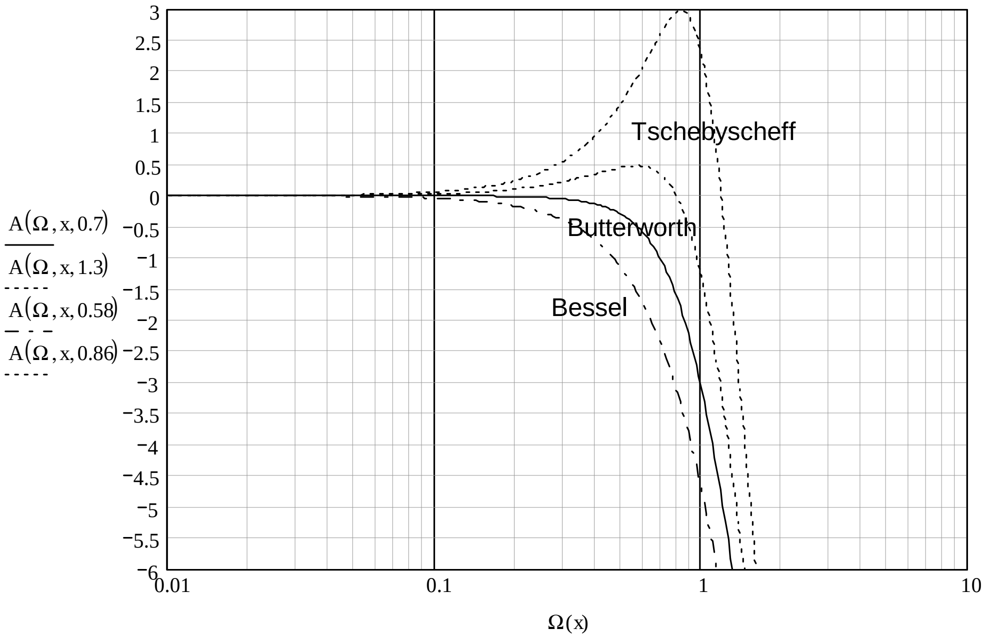
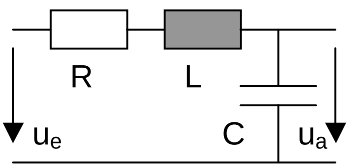


Fig. 3-16 Butterworth, Tschebyscheff und Bessel Filter - Charakter

Den nachfolgenden Betrachtungen wird folgende Anordnung zugrunde gelegt:



$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{(1-\Omega_N^2) + j\frac{1}{k}\Omega_N}$$ mit der Normierung

$$\Omega_N = \omega\sqrt{LC}\ ,\ k\Omega_N = \omega\frac{L}{R}\ ,\ \frac{1}{k}\Omega_N = \omega RC$$

[12] Eckfrequenz, 3dB-Ort, 3dB-Punkt.

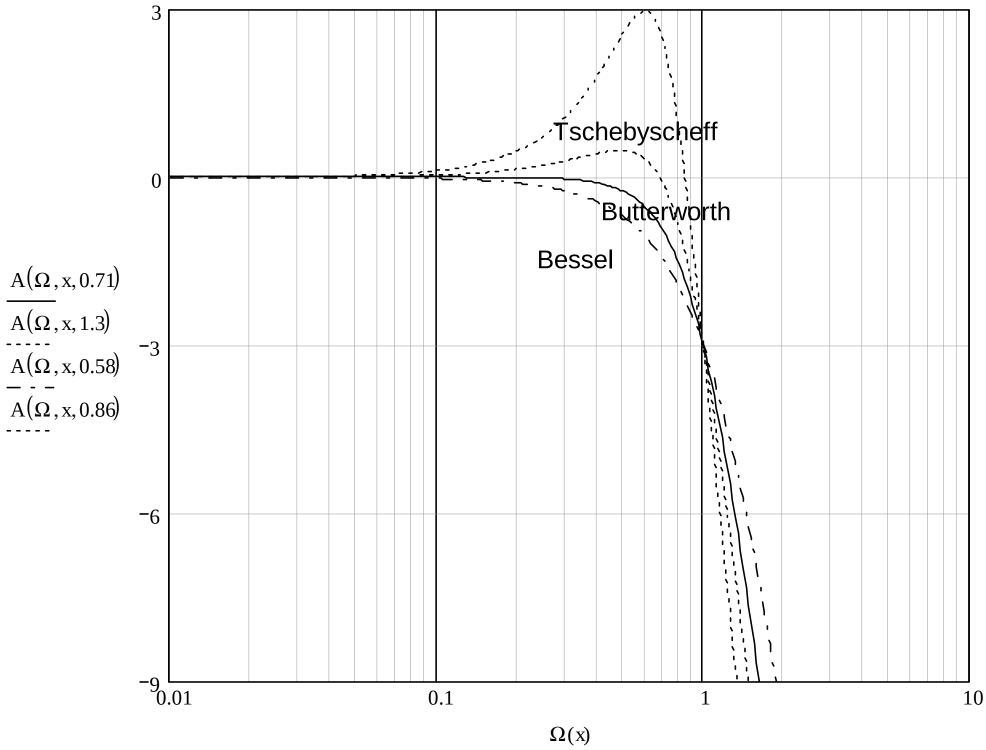


Fig. 3-17 Die Filter – Charaktere, normiert auf die Eckfrequenz

3.7.1 Filter mit Butterworth Charakter

Butterworth Filter zeichnen sich durch einen Amplitudengang aus, der im Durchlassbereich bis zur Grenzfrequenz möglichst horizontal verläuft.

Tiefpässe lassen sich allgemein darstellen als

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|^2 = \frac{a_0}{1 + a_2\Omega^2 + a_4\Omega^4 + ... + a_{2n}\Omega^{2n}} \qquad (3\text{-}13)$$

worin Ω auf die Eck- oder Grenzfrequenz normiert ist.

Angewendet auf unser Beispiel wird nach 3.6.1 aus

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{(1 - \Omega_{3dB}{}^2 \cdot \Omega^2) + j\frac{1}{k}\Omega_{3dB} \cdot \Omega}$$

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{k} - 2\right)\Omega_{3dB}{}^2 \cdot \Omega^2 + \Omega_{3dB}{}^4 \cdot \Omega^4} \qquad (3\text{-}14)$$

mit $\Omega_{3dB} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^2 + 1}}$

Aufgabe: Leiten Sie Ω_{3dB} aus $\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{(1-\Omega_N{}^2) + j\frac{1}{k}\Omega_N}$ her.

Damit $\left|\frac{u_a}{u_e}\right|^2$ möglichst horizontal verläuft, soll $\left|\frac{u_a}{u_e}\right|^2$ nur von der höchsten Potenz Ω^{2n} beziehungsweise Ω^4 abhängen.

Die tieferen Potenzen von Ω ergeben für Ω<1 höhere Beiträge an den Amplitudenabfall. Um dies zu vermeiden sollen die Koeffizienten a_1 bis a_{2n-2} Null sein.

$$a_2 = a_4 = ... = a_{2n-2} = 0 \text{ beziehungsweise } \frac{1}{k} - 2 = 0 \text{ ; } k = 0{,}707 \qquad (3\text{-}15)$$

Damit wird $|u_a/u_e|$ für das Butterworth – Filter näherungsweise

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_B^2 \approx \frac{a_0}{1 + a_{2n}\Omega^{2n}} \qquad \left|\frac{u_a}{u_e}\right|_B^2 \approx \frac{1}{1 + \Omega_{3dB}{}^4 \cdot \Omega^4} \qquad (3\text{-}16)$$

Für Ω = 1 soll die Amplitude um 3 dB abgenommen haben, das heisst

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{B\,\Omega=1}^2 = \frac{a_0}{2} \approx \frac{a_0}{1 + a_{2n}} \qquad \left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{B\,\Omega=1}^2 = \frac{1}{2} \approx \frac{1}{1 + \Omega_{3dB}{}^4}$$

Der Butterworth – Charakter ergibt sich mit

$$a_{2n} = 1 \text{ beziehungsweise } \Omega_{3dB}{}^4 = 1 \qquad (3\text{-}17)$$

und der oben genannten Bedingung, was im Beispiel erfüllt ist. (Fig. 3-17)

Zusammengefasst sind zwei Bedingungen zu erfüllen:

In $\left|\frac{u_a}{u_e}\right|^2 = \frac{a_0}{1 + a_2\Omega^2 + a_4\Omega^4 + ... + a_{2n}\Omega^{2n}}$ müssen $a_2 = a_4 = ... = a_{2n-2} = 0$

und $a_{2n} = 1$ sein.[13]

[13] In aktiven Schaltungen ist a_0 die Verstärkung bei tiefen Frequenzen (bei f gegen Null).

3.7.2 Filter mit Tschebyscheff Charakter

Tschebyscheff Filter lassen vorgegebene Spannungsüberhöhungen mit konstanter Amplitude (Welligkeit) zu. Die Filter zeichnen sich durch eine hohe Steilheit auf die Grenzfrequenz hin aus und werden mit zunehmender Welligkeit steiler. (Fig. 3-16, Fig. 3-17)

3.7.2.1 Tschebyscheff - Tiefpass zweiter Ordnung

Die Form $\frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{(1-\Omega_{3dB}{}^2 \cdot \Omega^2) + j\frac{1}{k}\Omega_{3dB} \cdot \Omega}$ weist nur einen Ort mit einer Spannungsüberhöhung auf, nämlich den Ort $\Omega_{Max} = \sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$. Für Ω_{Max} wird

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{Max} = \frac{2 \cdot k^2}{\sqrt{4 \cdot k^2 - 1}}.$$

Aufgabe: Leiten Sie Ω_{Max} her und bestimmen Sie $\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{Max}$.

Für eine bestimmte Welligkeit (Spannungsüberhöhung) von A dB lässt sich ansetzen

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|^2_{Max} = \frac{4 \cdot k^4}{4 \cdot k^2 - 1} = \left(10^{\frac{A}{20}}\right)^2 = a^2$$ woraus sich k errechnet zu

$k = \sqrt{\frac{a^2 + a\sqrt{a^2-1}}{2}}$. Für eine Welligkeit von 3 dB wird k = 1,307 und für 0,5 dB wird k = 0,864.

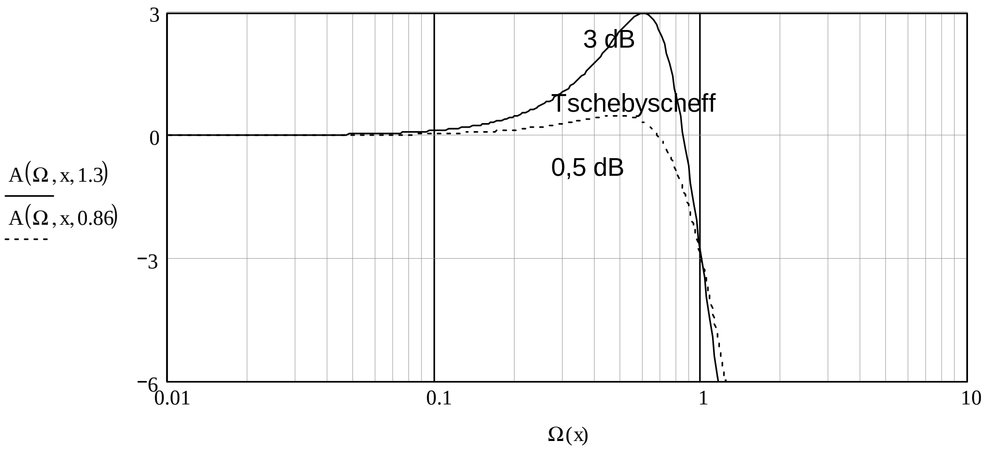


Fig. 3-18 Tschebyscheff Tiefpass mit 3 dB und 0,5 dB Welligkeit

3.7.2.2 Tschebyscheff - Tiefpass höherer Ordnung

Wird unter 3.7.4 behandelt.

3.7.3 Filter mit Bessel Charakter

Bessel Filter sind bezüglich der Gruppenlaufzeit optimiert.

3.7.3.1 Gruppenlaufzeit

Das Signal $u_e = U_1 \sin\omega t_1$ wird in ein Zweitor gespeist. Zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 weist das Signal den Winkelwert ωt_1 auf. Das Signal erscheint am Ausgang zeitlich um die **Phasenlaufzeit T_P** verschoben.

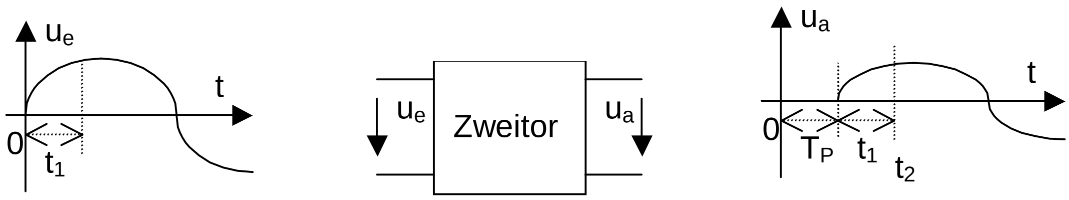


Fig. 3-19 Phasenlaufzeit

Am Ausgang erscheint das Signal $u_a = U_2 \sin(\omega t_1 - \varphi(\omega))$.
Der Amplitudenwert zum Winkel ωt_1 erscheint am Ausgang zur Zeit t_2 mit dem Winkelwert ωt_2 . Es muss daher gelten
$\omega t_1 - \varphi(\omega) = \omega t_2$ und daraus $-\varphi(\omega) = \omega(t_2 - t_1) = \omega T_P = \omega \cdot \Delta t$. Damit wird

$$T_P = \Delta t = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = \frac{b(\omega)}{\omega} = \Delta t(\omega) \qquad (3\text{-}18)$$

Der Ausdruck $b(\omega)$ wird **Wellenphasenmass** genannt.
Ein Signal das verschiedene Frequenzen enthält (zum Beispiel ein Dreiecksignal) wird dann verzerrungsfrei übertragen, wenn $\Delta t(\omega)$ frequenz**un**abhängig ist, das heisst wenn $\varphi(\omega) \sim \omega$ beziehungsweise $\varphi(\omega) = -K\omega$.
Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Ableitung von $\varphi(\omega)$ nach ω konstant ist.

$$t_{gr} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \qquad (3\text{-}19)$$

Die Ableitung von $\varphi(\omega)$ nach ω nennen wir **Gruppenlaufzeit t_{gr}**. Ein beliebiges Signal wird demnach verzerrungsfrei übertragen, wenn die Gruppenlaufzeit t_{gr} und damit die Phasenlaufzeit T_P konstant sind. [14]

3.7.3.2 Bessel – Filter am Beispiel

Bessel – Filter sind Filter, welche die Gruppenlaufzeit möglichst konstant halten. Für praktische Anwendungen wird die normierte Gruppenlaufzeit T_{gr} eingeführt.

$$T_{gr} = \frac{t_{gr}}{T_{3dB}} = t_{gr} \cdot f_{3dB} = \frac{t_{gr}}{2\pi} \cdot \omega_{3dB} = -\frac{\omega_{3dB}}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d\Omega} \qquad (3\text{-}20)$$

Angewendet auf das Beispiel wird mit

[14] Mit dem Begriff „Gruppe“ sind benachbarte Frequenzen, eine Gruppe von Frequenzen gedacht.

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{1}{k}\Omega_{3dB}\cdot\Omega}{1-\Omega_{3dB}{}^2\cdot\Omega^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi}{d\Omega} = T_{gr} = \frac{\Omega_{3dB}}{2\pi k}\cdot\frac{1+\Omega_{3dB}{}^2\Omega^2}{1+\left(\frac{1}{k^2}-2\right)\Omega_{3dB}{}^2\Omega^2+\Omega_{3dB}{}^2\Omega^4}$$

Die normierte Gruppenlaufzeit T_{gr} wird dann möglichst lange konstant, wenn einerseits die Faktoren vor Ω^2 im Zähler und im Nenner übereinstimmen und andererseits der Faktor vor Ω^4 den 3 dB - Punkt für $\Omega = 1$ erfüllt.
Die erste Bedingung ist erfüllt mit

$$\Omega_{3dB}{}^2 = \left(\frac{1}{k^2}-2\right)\cdot\Omega_{3dB}{}^2 \quad ; \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

und die zweite Bedingung mit $\left(1-\Omega_{3dB}{}^2\right)^2 + \frac{1}{k^2}\Omega_{3dB}{}^2 = 2$

Die nachfolgende Figur vergleicht die Gruppenlaufzeiten von Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.

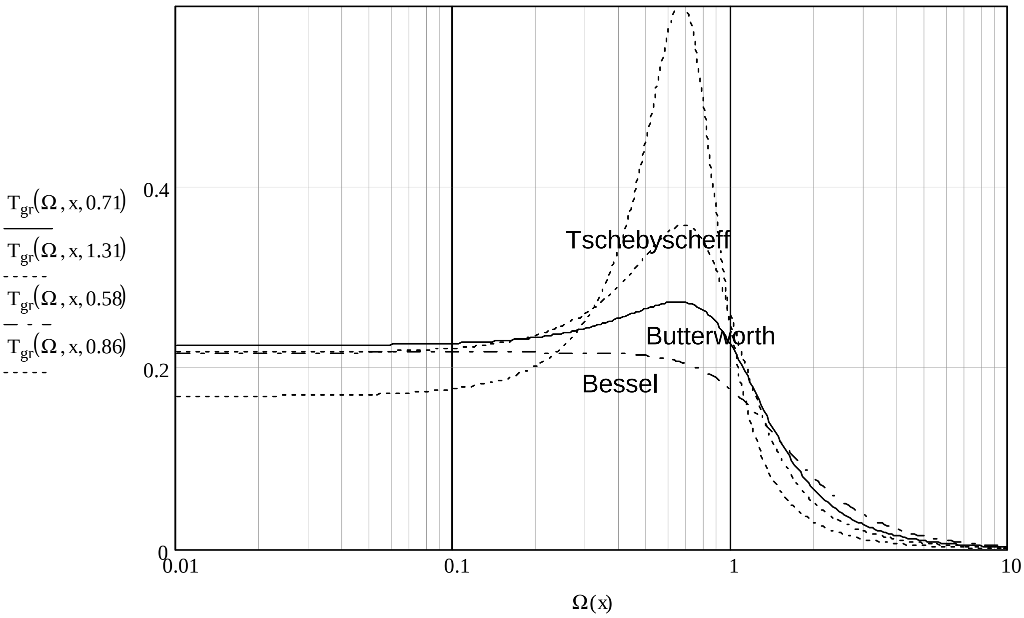


Fig. 3-20 Gruppenlaufzeit im Vergleich

3.7.3.3 Bessel – Filter zweiter Ordnung

Tiefpässe zweiter Ordnung lassen sich, normiert auf die Eckfrequenz, allgemein darstellen als

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{a_0}{1 + a_1 \cdot j\Omega + b_1 \cdot j\Omega \cdot j\Omega} \tag{3-21}$$

Aus $\varphi = -\arctan\left(\dfrac{a_1 \cdot \Omega}{1 - b_1 \cdot \Omega^2}\right)$

folgt für die normierte Gruppenlaufzeit

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d\Omega} = T_{gr} = \frac{a_1}{2\pi} \cdot \frac{1 + b_1 \cdot \Omega^2}{1 + \left(a_1^2 - 2 \cdot b_1\right) \cdot \Omega^2 + b_1^2 \Omega^4} \tag{3-22}$$

Die normierte Gruppenlaufzeit T_{gr} wird dann möglichst lange konstant, wenn einerseits die Faktoren vor Ω^2 im Zähler und im Nenner übereinstimmen und andererseits der Faktor vor Ω^4 den 3 dB - Punkt für $\Omega = 1$ erfüllt (Normierungsbedingung). Damit werden

$$b_1 = \frac{1}{3} a_1^2 \qquad \text{und}$$

$$\left|\frac{u_a}{u_e}\right|_{3dB}^2 = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{\left(1 - b_1\right)^2 + a_1^2} \tag{3-23}$$

3.7.3.4 Bessel - Tiefpass höherer Ordnung

Wird unter 3.7.4 behandelt.

3.7.4 Filter höherer Ordnung

3.8 Mittelwerte periodischer Funktionen

Wir gehen aus von einer periodischen Funktion u(t) oder i(t) mit der Periodendauer T und der Frequenz f = 1/T.

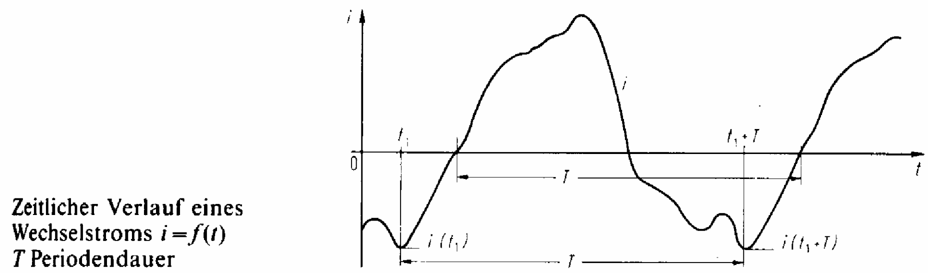


Fig. 3-21 Periodische Funktion [aus L 3-1]

Für elektrotechnische Anwendungen interessieren zwei Grössen:

- Welche Ladung wird im Mittel transportiert ?
- Welche Leistung wirkt an einem Verbraucher (am Widerstand R) ?

3.8.1 Gleichrichtwerte

Die während der Zeit t transportierte Ladung ergibt sich aus $Q = \int_0^t i(t) \cdot dt = \langle i(t) \rangle \cdot t$,

worin der Mittelwert des Stromes wird

DEFINITION

$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot dt \qquad (3\text{-}24)$$

Für Anwendungen geeignete Werte ergeben sich nach einer Gleichrichtung des periodischen Signals. Dabei unterscheiden wir die Einweg- und die Zweiweg - Gleichrichtung.

3.8.1.1 Einweg - Gleichrichtwert

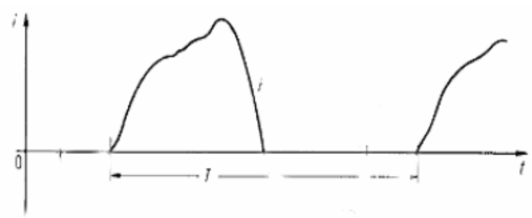
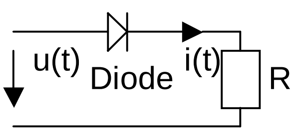


Fig. 3-22 Einweg - Gleichrichtung



Für die Mittelwertbildung werden nur die positiven Anteile der Spannungs- oder der Strom - Funktion berücksichtigt.

3.8.1.2 Zweiweg – Gleichrichtwert

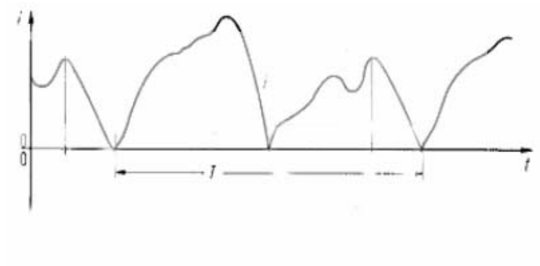
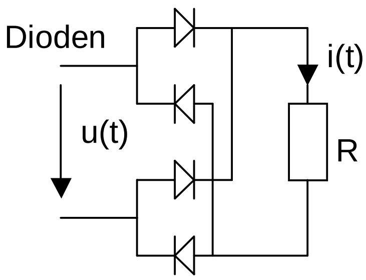


Fig. 3-23 Zweiweg - Gleichrichtung



Für die Mittelwertbildung werden die negativen Anteile der Spannungs- oder der Strom – Funktion an der Zeitachse positiv gespiegelt.

Es gilt dann

$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)| \cdot dt \qquad (3\text{-}25)$$

3.8.1.3 Gleichrichtwerte sinusförmiger Signale

Beweisen Sie, dass für $u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gelten:

$$\langle u(t) \rangle_{1Weg} = \frac{1}{\pi} \cdot U \qquad (3\text{-}26)$$

$$\langle u(t) \rangle_{2Weg} = \frac{2}{\pi} \cdot U \qquad (3\text{-}27)$$

3.8.2 Effektivwert

Für die meisten Wirkungen des elektrischen Stromes ist die übertragene Arbeit W = U·I·t und damit die Leistung P = U·I = I^2·R = U^2/R massgebend.

Für periodische Signale werden $I^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 \cdot dt$ und $U^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [u(t)]^2 \cdot dt$

Daraus definieren wir den Effektivwert für Spannung und Strom:

DEFINITION

$$i_{eff} = i_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 \cdot dt}$$

$$u_{eff} = u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [u(t)]^2 \cdot dt} \qquad (3\text{-}28)$$

Beweisen Sie, dass für $u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gilt:

$$u(t)_{effektiv} = u_{eff} = u_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U \tag{3-29}$$ [15]

3.8.3 Formfaktor und Scheitelfaktor

Als **Formfaktor** F eines periodischen Signals definieren wir das Verhältnis von Effektivwert u_{eff} zum Gleichrichtwert $u_{Gleichricht} = \langle u \rangle$:
DEFINITION

$$F = \frac{u_{eff}}{\langle u \rangle} \tag{3-30}$$

Frage: Wie gross ist der Formfaktor für sinusförmiges Signal ?

Als **Scheitelfaktor** ξ eines periodischen Signals definieren wir das Verhältnis von Scheitelwert $\hat{u}$ zum Effektivwert u_{eff} :
DEFINITION

$$\xi = \frac{\hat{u}}{u_{eff}} \tag{3-31}$$

Frage: Wie gross ist der Scheitelfaktor für sinusförmiges Signal ?

[15] rms: root mean square

3.9 Verzeichnisse

3.9.1 Literaturverzeichnis und Software

L 3-1 Frohne Heinrich, Löcherer Karl-Heinz und Müller Hans, Grundlagen der Elektrotechnik, Verlag B.G.Teubner, Stuttgart – Leipzig, 1996, ISBN 3-519-46400-4.

L 3-2 Gren Joachim und Krause Joachim, Metzler Physik, Verlag Schroedel, Hannover, 1998, ISBN 3-507-10700-7.

L 3-3 MATHCAD® 2000. Mathematiksoftware, die sich für numerische Rechnungen und Laborauswertungen eignet.

L 3-4 Tabellenbuch Informations- und Telekommunikationstechnik, Verlag Dr. Max Gehlen, Bad Homburg vor der Höhe, 1998, ISBN 3-441-92102-x

L 3-5 Tietze Ulrich, Schenk Christoph, Halbleiter-Schaltungstechnik, Dritte Auflage, Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1974, ISBN 3-540-06667-5.

3.9.2 Verzeichnis der Figuren

3.9.3 Stichwortverzeichnis

Kurzschluss in einer Schalttafel