

Aufgabe 1

In welchem Bereich der komplexen Ebene (der GAUSSschen Zahlenebene) liegt die Wellenimpedanz Z_0 ?

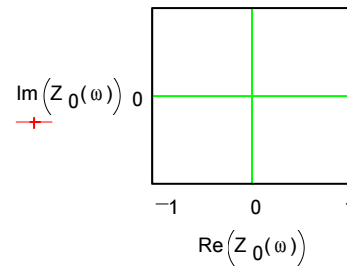
Hinweis: alle Beläge sind positiv.

Lösung 1

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{R'^2 + \omega^2 L'^2}{G'^2 + \omega^2 C'^2}} \cdot e^{j \frac{\varphi - \psi}{2}}$$

worin

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L'}{R'} \quad \psi = \arctan \frac{\omega C'}{G'}$$



Mit $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ und $0 \leq \psi \leq \pi/2$ wird $-\pi/2 \leq \varphi - \psi \leq \pi/2$. Z_0 liegt damit in der rechten Halbebene und ist im Winkel auf den Bereich -45° bis 45° begrenzt.

Aufgabe 2

Gegeben ist eine Leitung mit folgenden Leitungskonstanten (Belägen):¹

$$R' = 125 \, \Omega \text{km}^{-1} \quad C' = 35 \, \text{nFkm}^{-1} \quad L' = 700 \, \mu\text{Hkm}^{-1} \quad G' = 0 \, (\Omega \text{km})^{-1}$$

- Bestimmen Sie die Wellenimpedanz und die fehlenden Beläge (Dämpfungsbelag und Phasenbelag) für eine Frequenz von $f = 5 \text{ kHz}$.
- Die Leitung sei beidseitig mit der Wellenimpedanz abgeschlossen. Am Eingang werden $10\text{V} \cdot \sin \omega t$ eingespeist. Welche Spannung messen wir am Ausgang der Leitung ?

Lösung 2

$$\text{a)} \quad R := 125 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}} \quad C := 35 \cdot \frac{\text{nF}}{\text{km}} \quad L := 700 \cdot \frac{\mu\text{H}}{\text{km}} \quad G := 0 \cdot \frac{1}{\Omega \cdot \text{km}}$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \text{kHz} \quad Z_0 := \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}}$$

$$Z_0 = 260.219 - 218.435j \cdot \Omega \quad |Z_0| = 339.747 \cdot \Omega \quad \arg(Z_0) = -40.011 \cdot \text{grad}$$

¹ Der hochgestellte Strich bei den Belägen wird der Einfachheit halber oft weggelassen.

$$\gamma := \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)}$$

$$\gamma = 0.24 + 0.286j \cdot \frac{1}{\text{km}}$$

$$\alpha := \text{Re}(\gamma) \quad \beta := \text{Im}(\gamma)$$

$$\alpha = 0.24 \cdot \frac{1}{\text{km}} \quad \beta = 16.394 \cdot \frac{\text{grad}}{\text{km}}$$

b) $U_1 := 10 \cdot \text{V} \quad l := 1 \cdot \text{km}$

$$I_1 := \frac{U_1}{Z_0} \quad I_1 = 22.544 + 18.924j \cdot \text{mA} \quad |I_1| = 29.434 \cdot \text{mA}$$

$$U_2 := U_1 \cdot \cosh(\gamma \cdot l) - Z_0 \cdot I_1 \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

$$U_2 = 7.545 - 2.22j \cdot \text{V}$$

$$I_2 := \frac{-U_1}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma \cdot l) + I_1 \cdot \cosh(\gamma \cdot l)$$

$$I_2 = 21.21 + 9.274j \cdot \text{mA}$$

$$|U_2| = 7.865 \cdot \text{V} \quad |I_2| = 23.149 \cdot \text{mA}$$

Aufgabe 3

Welchen Verlauf weisen die Funktionen $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$ auf ?

Hinweis: gemeint sind die komplexen Funktionen der Zahlen $z = x + jv$.

Lösung 3

$$N := 20$$

$$u := 0..N$$

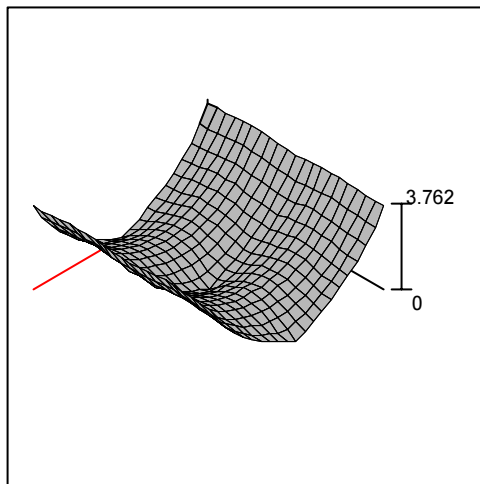
$$v := 0..N$$

$$x_u := -2 + .2 \cdot u$$

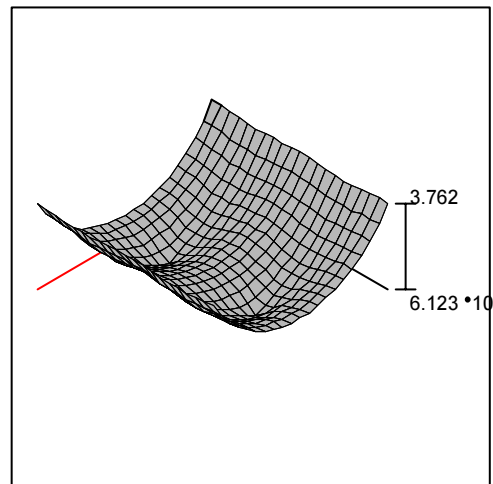
$$y_v := -\pi + \frac{\pi}{10} \cdot v$$

$$S_{u,v} := |\sinh(x_u + j \cdot y_v)|$$

$$C_{u,v} := |\cosh(x_u + j \cdot y_v)|$$



S



C

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Kabel Li - YCYP 2x0,5 mm² mit den Daten:

$$R' = 39 \, \Omega \text{km}^{-1} \quad C' = 120 \, \text{pFm}^{-1} \quad \omega = 2\pi \cdot 800 \, \text{Hz} \quad G = 0 \, (\Omega \text{m})^{-1}$$

- Wie lautet die Formel für die Phasengeschwindigkeit in diesem Fall ?
- Welchen Wert nimmt die Phasengeschwindigkeit absolut und relativ zur Lichtgeschwindigkeit an ?
- Wie lange braucht ein Signal um ein Kabel von 15 m Länge zu durchlaufen ?
Wie gross ist die Laufzeit pro Meter ?
- Leiten Sie die Formel für die Gruppenlaufzeit her.
- Wie gross ist die Gruppengeschwindigkeit im Bereich um 800 Hz ?

Lösung 4

$$R := 39 \frac{\Omega}{\text{km}} \quad C := 120 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot \text{Hz} \quad L := 0 \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad G := \frac{0}{\Omega \cdot \text{m}}$$

$$\text{a)} \quad \beta := \sqrt{\frac{\omega \cdot R \cdot C}{2}} \quad v_p := \frac{\omega}{\beta} \quad v_p := \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{R \cdot C}}$$

$$\text{b)} \quad v_p = 4.635 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \frac{v_p}{c_0} = 15.449 \cdot \%$$

$$\text{c)} \quad l := 15 \, \text{m} \quad t_p := \frac{l}{v_p} \quad t_p = 323.642 \cdot \text{ns} \quad t_l := \frac{m}{v_p} \quad t_l = 21.576 \cdot \text{ns}$$

$$\text{d)} \quad t_g := l \cdot \frac{d}{d\omega} \beta \quad t_g := \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot C}{2 \cdot \omega}}$$

$$\text{e)} \quad t_g = 161.821 \cdot \text{ns}$$

Aufgabe 5

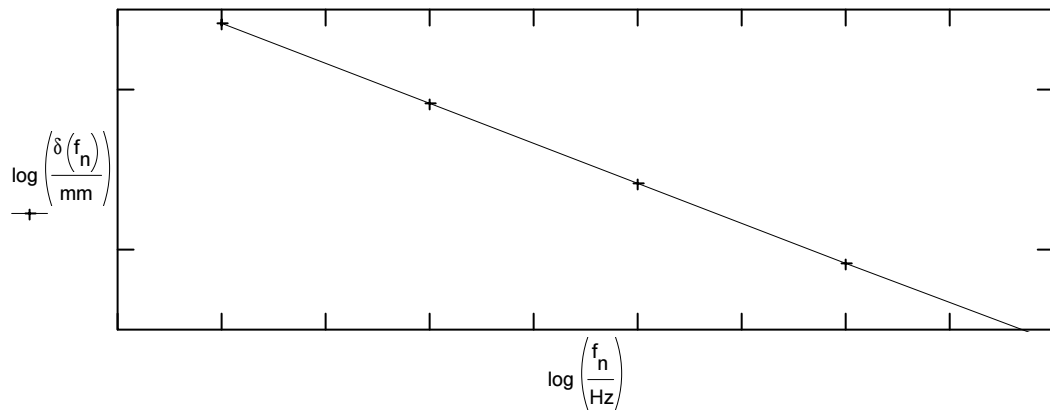
Bestimmen Sie die Eindringtiefe des Stromes in einen Kupferleiter und skizzieren Sie den Verlauf für verschiedene Frequenzen in einem logarithmischen Massstab.

Lösung 5

$$n := 1..5$$

$$f_n := 10^{n-2} \cdot \text{Hz}$$

$$\delta(f) := \sqrt{\frac{\rho_{\text{cu}}}{\pi \cdot \mu_0 \cdot f}}$$



Aufgabe 6

Berechnen Sie die primären Leitungsparameter für eine parallel geführte Zweidrahtleitung mit folgenden Abmessungen:

Leiterdurchmesser

$$D = 2 \text{ mm}$$

Abstand der Leiter

$$a = 20 \text{ cm}$$

Frequenz des Signals

$$f = 1 \text{ kHz}$$

$$\tan \delta = 0,01$$

Lösung 6

$$D := 2 \cdot \text{mm}$$

$$a := 20 \cdot \text{cm}$$

$$f := 1 \cdot \text{kHz}$$

$$\tan \delta := 0.01$$

Widerstandsbelag:

$$R_{\text{AC}} := \frac{2}{D} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{cu}} \cdot \mu_0 \cdot f}{\pi}}$$

$$R_{\text{DC}} := \frac{\rho_{\text{cu}} \cdot 8}{D^2 \cdot \pi}$$

$$R_{\text{AC}} = 2.608 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}}$$

$$R_{\text{DC}} = 10.823 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}}$$

$$R := \text{if}(R_{\text{DC}} > R_{\text{AC}}, R_{\text{DC}}, R_{\text{AC}})$$

$$R = 10.823 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}}$$

Induktivitätsbelag:

$$L := \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot a}{D}\right) \quad L = 2.119 \cdot \frac{\text{mH}}{\text{km}}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2$$

Ableitungsbelag:

$$G := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tan \delta \cdot C \quad G = 0.33 \cdot \frac{1}{\text{M}\Omega \cdot \text{km}}$$

Kapazitätsbelag:

$$C := \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{2 \cdot a}{D}\right)} \quad C = 5.25 \cdot \frac{\text{nF}}{\text{km}}$$

Wellenimpedanz:

$$Z_w := \sqrt{\frac{R + 2j \cdot \pi \cdot f \cdot L}{G + 2j \cdot \pi \cdot f \cdot C}} \quad Z_w = 680.847 - 237.957j \cdot \Omega \quad |Z_w| = 721.232 \cdot \Omega$$

Übertragungsbelag:

$$\gamma := \sqrt{(R + 2j \cdot \pi \cdot f \cdot L) \cdot (G + 2j \cdot \pi \cdot f \cdot C)} \quad \gamma = 0.008 + 0.022j \cdot \text{km}^{-1}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die primären Leitungsparameter für ein Koaxialkabel mit folgenden Abmessungen:

Innendurchmesser	$D_i = 2,6 \text{ mm}$	
Aussendurchmesser	$D_a = 9,5 \text{ mm}$	$\epsilon_r = 2,1$
Signalfrequenz	$f = 1 \text{ MHz}$	$\tan\delta = 0,005$

Lösung 7

$$D_i := 2.6 \cdot \text{mm} \quad D_a := 9.5 \cdot \text{mm} \quad f := 1 \cdot \text{MHz} \quad \tan\delta := 0.005 \quad \epsilon_r := 2.1$$

$$R := \left(\frac{1}{D_i} + \frac{1}{D_a} \right) \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{Cu}} \cdot \mu_0 \cdot f}{\pi}} \quad R = 40.396 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}} \quad \delta(f) := \sqrt{\frac{\rho_{\text{Cu}}}{\pi \cdot \mu_0 \cdot f}} \quad \delta(f) = 0.066 \cdot \text{mm} \Rightarrow \text{AC-Formeln}$$

$$L := \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right) \quad L = 259.156 \cdot \frac{\mu\text{H}}{\text{km}}$$

$$C := \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right)} \quad C = 90.159 \cdot \frac{\text{nF}}{\text{km}}$$

$$G := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tan\delta \cdot C \quad G = 2.832 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{\text{M}\Omega \cdot \text{km}}$$

$$Z_0 := \sqrt{\frac{R + 2j \cdot \pi \cdot f \cdot L}{G + 2j \cdot \pi \cdot f \cdot C}} \quad Z_0 = 53.619 - 0.531j \cdot \Omega \quad |Z_0| = 53.622 \cdot \Omega$$

$$Z := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}} \cdot \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right) \quad Z = 53.614 \cdot \Omega$$

Aufgabe 8

Gegeben sei ein verlustloses Koaxialkabel, dessen Wellenwiderstand ausgedrückt werde mit

$$R_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{k}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right). \text{ Bestimmen Sie den Faktor } k \text{ formal und als Wert.}$$

Lösung 8

$$R_0 = \frac{k}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right) \quad k := \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{2 \cdot \pi} \quad k = 59.959 \cdot \Omega$$

Aufgabe 9

Betrachtet wird ein Koaxialkabel RG 218 U. Das Kabel sei verlustlos, das heisst vom Freileitungstyp.

- Wie gross wird die relative Dielektrizitätskonstante, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit $k_v = 0,66$ gegeben ist?
- Der Wellenwiderstand des Kabels beträgt 50 Ohm und der Aussendurchmesser 18,6 mm. Wie gross ist der Durchmesser des Innenleiters?
- Welchen Wert nimmt der Kapazitätsbelag an?
- Wie lange hat ein Signal um eine Distanz von 180 Meter zu durchlaufen? (Thin - Ethernet)
- Der Innenleiter soll in seinem Durchmesser halbiert werden. Wie gross wird der Aussendurchmesser (Schirmdurchmesser) bei gleichbleibender Wellenimpedanz?

Lösung 9

$$\text{a) } k_v := 0.66 \quad \epsilon_r := \frac{1}{k_v^2} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2 \quad \epsilon_r = 2.296 \quad \epsilon := \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$\text{b) } D_a := 18.6 \cdot \text{mm} \quad R_0 := 50 \cdot \Omega$$

$$R_0 = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right) \quad D_i := \frac{D_a}{\exp\left(2 \cdot R_0 \cdot \sqrt{\epsilon} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\mu_0}}\right)} \quad D_i = 5.258 \cdot \text{mm}$$

$$\text{c) } C := \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right)} \quad C = 101.079 \cdot \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

$$d) \quad l := 180 \cdot \text{m} \quad v_p := c_0 \cdot k_v \quad v_p = 1.98 \cdot 10^8 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_p := \frac{l}{v_p} \quad t_p = 909.091 \cdot \text{ns}$$

=====

$$e) \quad R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{D_a}{D_i}\right) \quad D_a := \exp\left(2 \cdot R_0 \cdot \sqrt{\epsilon} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\mu_0}}\right) \cdot D_i \quad D_i := \frac{D_i}{2}$$

$$D_a = 9.3 \cdot \text{mm}$$

=====

Aufgabe 10

Gegeben ist ein Mikrostrip mit folgenden Abmessungen:

Leiterbreite	$w = 3,02 \text{ mm}$	Plattendicke	$h = 1,6 \text{ mm}$
Leiterdicke	$t = 0,035 \text{ mm}$	Epoxiharz	$\epsilon_r = 4,5$

- Welche Wellenimpedanz hat die Leitung ?
- Wie lange benötigt ein Signal auf dieser Leitung um die Breite eines 19 Zoll Gehäuses zu durchlaufen ?

Lösung 10

$$a) \quad w := 0.3 \cdot \text{mm} \quad t := 0.035 \cdot \text{mm} \quad h := 1.6 \cdot \text{mm} \quad \epsilon_r := 4.5$$

$$F_1 := 6 + (2 \cdot \pi - 6) \cdot e^{-\left(30.66 \cdot \frac{h}{w}\right)^{0.7528}}$$

$$F_1 = 6$$

$$\epsilon_{re} := \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \cdot \left(1 + 10 \cdot \frac{h}{w}\right)^{-0.555}$$

$$\epsilon_{re} = 2.941$$

$$Z_0 := \frac{60 \cdot \Omega}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \cdot \ln\left[\frac{F_1 \cdot h}{w} + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{w}\right)^2}\right]$$

$$Z_0 = 131.368 \cdot \Omega$$

=====

$$b) \quad l := 19 \cdot 25.4 \cdot \text{mm} \quad v_r := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \quad v_r = 0.583$$

$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$v_p := v_r \cdot c_0 \quad v_p = 1.749 \cdot 10^8 \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$t_l := \frac{l}{v_p} \quad t_l = 2.759 \cdot 10^{-9} \cdot \text{sec}$$

=====

Aufgabe 11

Ein NF - Kabel mit $R' = 120 \Omega \text{km}^{-1}$ und $C' = 34 \text{nFkm}^{-1}$ werde bei tiefen Frequenzen betrieben (dispersive Leitung, Kabeltyp).

- Bei welcher Frequenz wird die Wellenimpedanz gerade zu 600Ω ?
- Wie gross ist bei dieser Frequenz die Dämpfung in dB für ein 500 Meter langes Kabel ?

Lösung 11

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad R &:= 120 \frac{\Omega}{\text{km}} & C &:= 34 \frac{\text{nF}}{\text{km}} \\ Z_{0\text{abs}} &:= 600 \cdot \Omega & \omega &:= \frac{R}{Z_{0\text{abs}}^2 \cdot C} & \frac{\omega}{2 \cdot \pi} &= 1.56 \cdot \text{kHz} \\ & & & & & \text{=====} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \alpha &:= \sqrt{\frac{R \cdot \omega \cdot C}{2}} & \alpha &= 0.141 \frac{1}{\text{km}} & l &:= 0.500 \cdot \text{km} \\ & & & & \text{Neper} &:= \ln(e^{-\alpha \cdot l}) \\ & & & & \text{Neper} &= -0.071 \\ \text{Dezibel} &:= 20 \cdot \log(e^{-\alpha \cdot l}) & & & \text{in Neper} & \alpha \cdot 0.5 \cdot \text{km} = 0.071 \\ \text{Dezibel} &= -0.614 & & & & \\ A &:= \alpha \cdot l \cdot 20 \cdot \log(e) & A &= 0.614 \text{ dB} \\ & & & & & \text{=====} \end{aligned}$$

Aufgabe 12

Das Kabel RG 62 U hat eine Wellenimpedanz von 93Ω und einen Kapazitätsbelag von 45pFm^{-1} .

- Suchen Sie für diese verlustlose Leitung die Formel für die Phasengeschwindigkeit als Funktion der Wellenimpedanz und des Kapazitätsbelages.
- Wie gross ist der Verkürzungsfaktor des Kabels ?

Lösung 12

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad R_0 &:= 93 \cdot \Omega & C &:= 45 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \\ R_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}} & L &:= C \cdot R_0^2 & v_P &:= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} & v_P &:= \frac{1}{(C \cdot R_0)} \\ & & & & v_P &= 2.389 \cdot 10^8 \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1} \\ \text{b)} \quad k_v &:= \frac{v_P}{c_0} & k_v &= 79.65 \cdot \% \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Eine Übertragungsleitung mit einer Wellenimpedanz von 1200Ω wird mit einer induktivem Impedanz ($Z = 600\Omega$, $\phi = 30 \text{ Grad}$) abgeschlossen. Wie gross wird der Reflexionsfaktor r ?

Lösung 13

$$Z_0 := 1200 \cdot \Omega \quad \phi := 30 \cdot \text{grad} \quad Z_a := 600 \cdot e^{j \cdot (\phi)} \cdot \Omega$$

$$r := \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} \quad r = -0.354 + 0.236j \quad |r| = 0.426 \quad \arg(r) = 146.31 \cdot \text{grad}$$

Aufgabe 14

Eine Leitung mit einer Wellenimpedanz von 600Ω soll mit einem Reflexionsfaktor kleiner als $0,1$ abgeschlossen werden. In welchem Bereich muss der Abschlusswiderstand liegen ?

Lösung 14

$$Z_0 := 600 \cdot \Omega \quad r_{\max} := 0.1 \quad r_{\min} := -0.1$$

$$Z_{\min} := Z_0 \cdot \frac{1 + r_{\min}}{1 - r_{\min}} \quad Z_{\min} = 490.909 \cdot \Omega \quad Z_{\max} := Z_0 \cdot \frac{1 + r_{\max}}{1 - r_{\max}} \quad Z_{\max} = 733.333 \cdot \Omega$$

Aufgabe 15

Reflexion auf einem Kabel

Ein Übertragungskabel von 17 m Länge werde bei tiefen Frequenzen betrieben (Kabeltyp, dispersives Kabel). Widerstandsbelag $39 \Omega \text{ km}^{-1}$, Kapazitätsbelag 120 nF km^{-1} und Betriebsfrequenz $4,8 \text{ kHz}$.

- Wie gross ist die Wellenimpedanz des Kabels ?
- Wie lange hat das Signal, um das Kabel zu durchlaufen ?
- Die Leitung sei gespiesen aus einer Quelle mit $R_q = 300 \Omega$ und abgeschlossen mit einem Lastwiderstand von $R_L = \Omega$. Wie gross werden die Reflexionsfaktoren ?
- Die Quelle weise eine Leerlaufspannung von $U_0 = 5 \text{ V}$ auf. Berechnen Sie vier hinlaufende und rücklaufende Spannungen.
- Auf welchen Wert wird sich die Eingangsspannung einstellen ?

Lösung 15

$$\text{a) } R := 39 \frac{\Omega}{\text{km}} \quad C := 120 \frac{\text{nF}}{\text{km}} \quad l := 17 \cdot \text{m} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot 4800 \cdot \text{Hz}$$

$$Z_0 := \sqrt{\frac{R}{j \cdot \omega \cdot C}} \quad Z_0 = 73.403 - 73.403j \cdot \Omega \quad |Z_0| = 103.808 \cdot \Omega$$

$$\arg(Z_0) = -45 \cdot \text{grad}$$

$$\text{b) } \gamma := \sqrt{j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \quad \gamma = 0.266 + 0.266j \cdot \frac{1}{\text{km}} \quad \alpha := \text{Re}(\gamma) \quad \beta := \text{Im}(\gamma)$$

$$t_p := \frac{\beta}{\omega} \cdot l \quad t_p = 149.743 \cdot \text{ns}$$

$$\text{c) } R_q := 300 \cdot \Omega \quad R_L := 4 \cdot \text{k}\Omega$$

$$r_q := \frac{R_q - Z_0}{R_q + Z_0} \quad r_q = 0.547 + 0.304j \quad |r_q| = 0.626 \quad \arg(r_q) = 29.07 \cdot \text{grad}$$

$$r_L := \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \quad r_L = 0.963 + 0.035j \quad |r_L| = 0.964 \quad \arg(r_L) = 2.103 \cdot \text{grad}$$

$$\text{d) } U_0 := 5 \cdot \text{V}$$

$$U_{h1} := U_0 \cdot \frac{Z_0}{R_q + Z_0} \quad U_{h1} = 1.132 - 0.76j \cdot \text{V} \quad |U_{h1}| = 1.364 \cdot \text{V} \quad \arg(U_{h1}) = -33.879 \cdot \text{grad}$$

$$U_{r1} := U_{h1} \cdot r_L \cdot e^{-(2 \cdot \gamma \cdot l)} \quad U_{r1} = 1.101 - 0.696j \cdot \text{V} \quad |U_{r1}| = 1.303 \cdot \text{V} \quad \arg(U_{r1}) = -32.293 \cdot \text{grad}$$

$$U_{h2} := U_{r1} \cdot r_q \quad U_{h2} = 0.814 - 0.046j \cdot \text{V} \quad |U_{h2}| = 0.816 \cdot \text{V} \quad \arg(U_{h2}) = -3.222 \cdot \text{grad}$$

$$U_{r2} := U_{h2} \cdot r_L \cdot e^{-(2 \cdot \gamma \cdot l)} \quad U_{r2} = 0.779 - 0.022j \cdot \text{V} \quad |U_{r2}| = 0.779 \cdot \text{V} \quad \arg(U_{r2}) = -1.637 \cdot \text{grad}$$

$$U_{h3} := U_{r2} \cdot r_q \quad U_{h3} = 0.433 + 0.225j \cdot \text{V} \quad |U_{h3}| = 0.488 \cdot \text{V} \quad \arg(U_{h3}) = 27.434 \cdot \text{grad}$$

$$\text{e) } U_1 := U_0 \cdot \frac{Z_0}{R_q + Z_0} \cdot \frac{1 + r_L \cdot e^{-(2 \cdot \gamma \cdot l)}}{1 - r_L \cdot r_q \cdot e^{-(2 \cdot \gamma \cdot l)}} \quad |U_1| = 4.651 \cdot \text{V} \quad \arg(U_1) = -0.984 \cdot \text{grad}$$

Aufgabe 16

Ein Kabel mit einem Widerstandsbelag von $R' = 120 \Omega \text{km}^{-1}$ und einem Kapazitätsbelag $C' = 34 \text{nFkm}^{-1}$ wird bei einer Frequenz von 1 kHz betrieben. Die Leitung wird mit einem Widerstand von $R_L = 470 \Omega$ abgeschlossen. Welche Eingangsimpedanz hat die Leitung, wenn sie 1 km lang ist ?

Lösung 16

$$R := 120 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}} \quad C := 34 \cdot \frac{\text{nF}}{\text{km}} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \text{kHz} \quad l := 1 \cdot \text{km} \quad R_2 := 470 \cdot \Omega$$

$$Z_0 := \sqrt{\frac{R}{j \cdot \omega \cdot C}} \quad Z_0 = 529.964 - 529.964j \cdot \Omega \quad |Z_0| = 749.482 \cdot \Omega$$

$$\gamma := \sqrt{j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \quad \gamma = 0.113 + 0.113j \cdot \frac{1}{\text{km}} \quad \beta := \text{Im}(\gamma)$$

$$Z_1 := R_2 \cdot \frac{1 + \frac{Z_0}{R_2} \cdot \tanh(\gamma \cdot l)}{1 + \frac{R_2}{Z_0} \cdot \tanh(\gamma \cdot l)} \quad \lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \lambda = 55.498 \cdot \text{km}$$

$$Z_1 = 583.51 - 59.557j \cdot \Omega \quad |Z_1| = 586.541 \cdot \Omega$$

$$\arg(Z_1) = -5.828 \cdot \text{grad}$$

Aufgabe 17

Ein Kabel von 1,2 km Länge wird mit einem 32 kHz Sinus - Signal ausgemessen. Gemessen wird die Eingangsimpedanz des Kabels (Spannung und Strom), und zwar für einen Kurzschluss - Abschluss und für einen Leerlauf - Abschluss. Die Messungen ergeben:

$$Z_{1K} = 170 \cdot e^{-j\frac{\pi}{12}} \Omega \quad \text{und} \quad Z_{1L} = 230 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \Omega$$

- Wie lauten die Formeln für die Berechnung der Wellenimpedanz und des Übertragungsbelages (Übertragungsmass) ?
- Berechnen Sie die Wellenimpedanz und den Übertragungsbelag.
- Bestimmen Sie die primären Leitungsparameter

Lösung 17

a) **Leerlauf:**

$$I_2 := 0 \cdot \text{A} \quad U_{1L} = U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l) + Z_0 \cdot I_2 \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

$$I_{1L} = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma \cdot l) + I_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l)$$

$$Z_{1L} = \frac{U_{1L}}{I_{1L}} \quad Z_{1L} = \frac{Z_0}{\tanh(\gamma \cdot l)}$$

$$U_{1L} = U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l)$$

$$I_{1L} = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

Kurzschluss:

$$U_2 := 0 \cdot \text{V} \quad U_{1K} = U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l) + Z_0 \cdot I_2 \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

$$I_{1K} = \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma \cdot l) + I_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l)$$

$$Z_{1K} = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} \quad Z_{1K} = Z_0 \cdot \tanh(\gamma \cdot l)$$

$$U_{1K} = Z_0 \cdot I_2 \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

$$I_{1K} = I_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l)$$

Zusammenfassung:

$$Z_{1K} \cdot Z_{1L} = Z_0 \cdot \tanh(\gamma \cdot l) \cdot \frac{Z_0}{\tanh(\gamma \cdot l)} \quad Z_0 = \sqrt{Z_{1K} \cdot Z_{1L}}$$

$$\frac{Z_{1K}}{Z_{1L}} = \frac{Z_0 \cdot \tanh(\gamma \cdot l)}{Z_0} \quad \gamma = \frac{\operatorname{atanh}\left(\sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1L}}}\right)}{l}$$

b)

$$Z_{1K} := 170 \cdot e^{-j \cdot 15 \cdot \text{grad}} \cdot \Omega \quad Z_{1L} := 230 \cdot e^{-j \cdot 60 \cdot \text{grad}} \cdot \Omega \quad l := 1.2 \cdot \text{km} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot 32 \cdot \text{kHz}$$

$$Z_0 := \sqrt{Z_{1K} \cdot Z_{1L}} \quad Z_0 = 156.875 - 120.375j \cdot \Omega \quad |Z_0| = 197.737 \cdot \Omega$$

$$\gamma := \frac{\operatorname{atanh}\left(\sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1L}}}\right)}{l} \quad \gamma = 0.645 + 0.497j \cdot \frac{1}{\text{km}}$$

$$\arg(Z_0) = -37.5 \cdot \text{grad}$$

c)

$$R := \operatorname{Re}(\gamma \cdot Z_0) \quad R = 161.027 \cdot \frac{\Omega}{\text{km}}$$

$$L := \frac{\operatorname{Im}(\gamma \cdot Z_0)}{\omega} \quad L = 1.84 \cdot \frac{\text{nH}}{\text{m}}$$

$$G := \operatorname{Re}\left(\frac{\gamma}{Z_0}\right) \quad G = 1.057 \cdot \frac{1}{\text{k}\Omega \cdot \text{km}}$$

$$C := \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma}{Z_0}\right)}{\omega} \quad C = 19.797 \cdot \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

Aufgabe 18

Mit Hilfe eines $\lambda/4$ Koaxial - Kabels und einer Kapazität C_{Last} soll eine Induktivität L nachgebildet werden. Kabeldaten: $Z_0 = 50 \Omega$, $C' = 101 \text{ pFm}^{-1}$.

- Wie Lang muss das Kabel sein ?
- Wie gross wird C_{Last} , wenn ein L mit 100Ω Impedanz entstehen soll ?

Lösung 18

a) $Z_0 := 50 \cdot \Omega$ $C := 101 \cdot \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ $f := 10 \cdot \text{MHz}$

$$\lambda := \frac{1}{f \cdot Z_0 \cdot C} \quad \lambda = 19.802 \cdot \text{m} \quad \frac{\lambda}{4} = 4.95 \cdot \text{m}$$

=====

b) $Z_{\text{ein}} := j \cdot 100 \cdot \Omega$ $Z_{\text{last}} := \frac{Z_0^2}{Z_{\text{ein}}}$ $Z_{\text{last}} = -25j \cdot \Omega$

$$C_{\text{last}} := \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Z_{\text{last}}} \quad C_{\text{last}} = 636.62 \cdot \text{pF}$$

Aufgabe 19

Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf der Spannung auf einer kurzgeschlossenen Leitung, die mit einem sinusförmigen Signal von 10 MHz gespeisen wird. Leitungsdaten: Wellenimpedanz 50Ω , Kapazitätsbelag 100 pFm^{-1} .

- Wie gross wird die Eingangsspannung bei einer Kabellänge von 45 m und einem Kurzschlussstrom von 100 mA ?
- Wie sieht der Stromverlauf auf dieser Leitung aus ? und wie gross ist der Eingangsstrom ?
- Wie gross wird die Eingangsspannung bei 5 V am Leitungsabschluss und
 - bei einem offenen Leitungsende ?
 - bei einem kapazitiven Abschluss ? $-j50 \Omega$
 - bei einem induktiven Abschluss ? $j50 \Omega$
- Wie sieht der Spannungsverlauf aus bei einem offenen Leitungsende, wenn eine Dämpfung von 0,01 Neper auf der Leitung herrscht ?

Lösung 19

a) $Z_0 := 50 \cdot \Omega$ $C := 100 \cdot \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ $f := 10 \cdot \text{MHz}$ $\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$

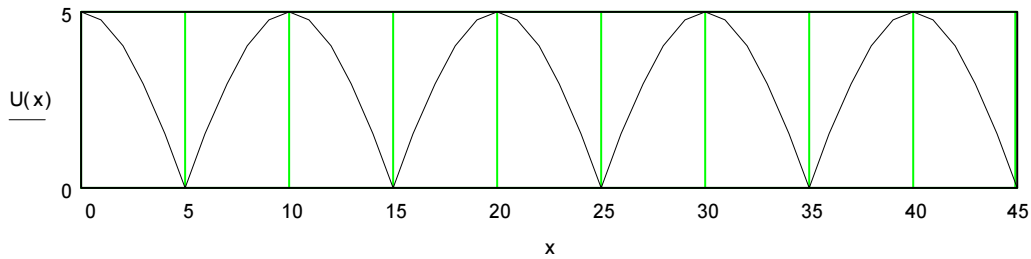
$$U_2 := 0 \cdot \text{V} \quad I_2 := 100 \cdot \text{mA} \quad l := 45 \cdot \text{m}$$

$$L := Z_0^2 \cdot C \quad \beta := \left(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \right) \quad \gamma := j \cdot \beta \quad \lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \lambda = 20 \cdot \text{m}$$

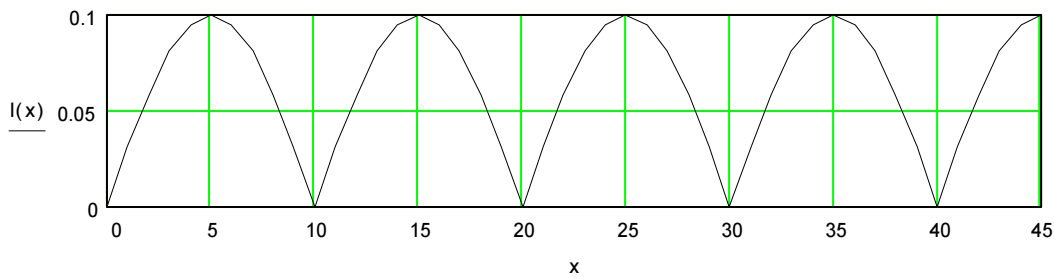
$$N := 0 \cdot \text{m} \quad x := N \dots l \quad \gamma = 0.314j \cdot \text{m}^{-1}$$

$$U(x) := \left| U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot (l - x)) + Z_0 \cdot I_2 \cdot \sinh(\gamma \cdot (l - x)) \right| \quad U(N) = 5 \cdot \text{V}$$

=====



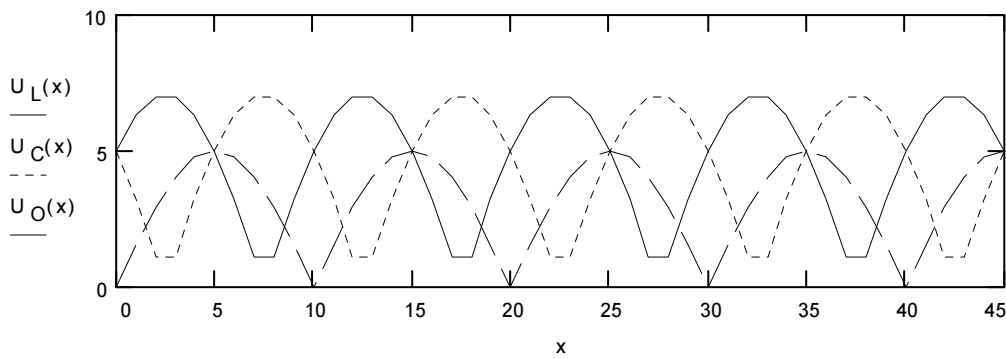
b)
$$I(x) := \left| \frac{U_2}{Z_0} \cdot \sinh(\gamma \cdot (l - x)) + I_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot (l - x)) \right| \quad I(N) = 5.511 \cdot 10^{-11} \text{ } \mu\text{A}$$



$$U_2 := 5\text{V} \quad I_{20} := 0\text{A} \quad U_O(x) := \left| U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot (l - x)) \right|$$

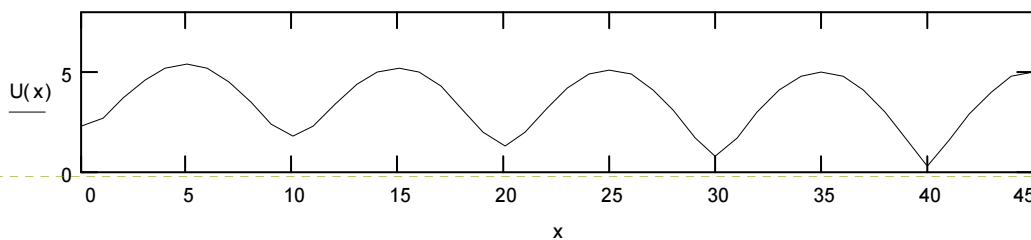
c)
$$Z_{2L} := 50j \cdot \Omega \quad I_{2L} := \frac{U_2}{Z_{2L}} \quad U_L(x) := \left| U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot (l - x)) + Z_0 \cdot I_{2L} \cdot \sinh(\gamma \cdot (l - x)) \right|$$

$$Z_{2C} := -j \cdot 50 \cdot \Omega \quad I_{2C} := \frac{U_2}{Z_{2C}} \quad U_C(x) := \left| U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot (l - x)) + Z_0 \cdot I_{2C} \cdot \sinh(\gamma \cdot (l - x)) \right|$$



$$\gamma_2 := 0.01 \cdot \frac{1}{\text{m}} + \gamma \quad \gamma_2 = 0.01 + 0.314j \cdot \frac{1}{\text{m}}$$

d)
$$U(x) := \left| U_2 \cdot \cosh[\gamma_2 \cdot (l - x)] \right|$$



Aufgabe 20

Die nachfolgenden Fragen sollen mit Hilfe der Smith - Chart beantwortet werden. Die Wellenimpedanz der Leitung beträgt $Z_0 = 50 \Omega$.

- Wo sind die Abschlussimpedanzen Z_{0L} im Smith - Diagramm zu finden ?
- Wie gross wird der zugehörige Reflexionsfaktor r ?
- Wie gross sind die maximalen und minimalen Spannungen entlang der Leitung ? An der Last herrschen 10 V.
- Wie gross sind die Distanzen der gefundenen Maxima und Minima bis zum Leitungsende ? Die Wellenlänge betrage 4 Meter.

Z_L [Ω]	r	U_{\min}	U_{\max}	I_{\min}	I_{\max}
∞					
0					
50					
$-j \cdot 50$					
$j \cdot 50$					
$50 + j \cdot 50$					
100					
10					
$40 + j \cdot 20$					
$80 - j \cdot 10$					
$50 - j \cdot 50$					

Lösung 20**Aufgabe 21**

Eine verlustlose Leitung mit einer Wellenimpedanz von 70Ω wird mit einer Impedanz von $(115 + j 80) \Omega$ belastet. Übertragen werde ein Signal mit einer Wellenlänge von 2,5 m und einer Leistung von 50 W.

- Bestimmen Sie die normierte Impedanz (Z_L/Z_0).
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Smith - Chart: die maximale und die minimale Impedanz auf der Leitung, sowie das Verhältnis der maximalen zur minimalen Spannung.
- In welchem Abstand zur Last befinden sich Spannungsminima und Spannungsmaxima ?
- Wie gross sind die maximale und die minimale Spannung ?
- Wie gross sind der Strom und die Spannung an der Last ?
- Wie gross ist die Eingangsimpedanz, wenn das Kabel 50 m lang ist ?

Lösung 21

Aufgabe 22

Eine Last von 60Ω werden irrtümlich an ein Kabel mit 240Ω Wellenimpedanz angeschlossen.

- a) Wie gross wird der Reflexionsfaktor ?
- b) Es wird ein Leistung von 1 mW eingespeist. Welche Leistung nimmt die Last auf ?
- c) Welche Dämpfung in dB resultiert aus dieser Fehlanpassung ?
- d) Wie lautet die Formel zur Berechnung dieser Anpassungsdämpfung aus dem Reflexionsfaktor ?

Lösung 22

Aufgabe 23

Mit einer Messleitung (längs der Leitung verschiebbare Sonde) wird die Spannungsverteilung längs der Leitung untersucht. Was lässt sich über den Reflexionsfaktor aussagen, wenn die Spannung zwischen 500 mV und 2 V variiert ?

Lösung 23

Aufgabe 24

Welcher Spannungs- und Stromverlauf ist richtig ?

Lösung 24

Aufgabe 25

Welcher Spannungs- und Stromverlauf ist richtig ?

Lösung 25
